Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

fortgeführt von

C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse und **Hans Rohrbach**

unter Mitwirkung von

W. Brödel, M. Deuring, A. Grothendieck, P. R. Halmos, O. Haupt,
F. Hirzebruch, E. Hopf, M. Kneser, G. Köthe, K. Prachar,
P. Roquette, W. Schmeidler, L. Schmetterer, E. Stiefel

Band 200

In 4 Heften

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1958

Archiv-Nr 180358
Satz von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Druck von Buchkunst, Berlin W 35
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis des Bandes 200

Seite

Aigner, Alexander, Die Häufigkeitsverteilung gewisser Typen von endlichen Graphen 125

Gold, Richard R. & M. Z. v. Krzywoblocki, On Superposability and Self-Superposability Conditions for Hydrodynamic Equations Based on Continuum. II 140

Grothendieck, A., Sur une note de Mattuck-Tate 208

Härtter, Erich, Über die Klasse der Gewichtsfunktionen bei der Verallgemeinerung des Dichtesatzes 89

Haupt, Otto, Verallgemeinerung eines ordnungsgeometrischen Reduktionssatzes 170

Kultze, Rolf, Zur Theorie Fredholmscher Endomorphismen in nuklearen topologischen Vektorräumen 112

Krzywoblocki, M. Z. v., siehe Richard R. Gold

Mattuck, Arthur, Reduction mod p of p-adic divisor classes 45

Ostrowski, A. M., On the bounds of a one-parametric family of matrices . . 190

Pöschl, Klaus, Über Anwachsen und Nullstellenverteilung der ganzen transzendenten Lösungen linearer Differentialgleichungen. II 129

Roquette, Peter, Zur Theorie der Konstantenreduktion algebraischer Mannigfaltigkeiten 1

Rühs, Fritz, Über das allgemeine Rédeische schiefe Produkt 99

Schell, Hugo, Über einige Probleme der Addition von linearen Punktmengen 52

Schmeidler, Werner, Variationsrechnung und Integralgleichungen 182

Stinespring, W. Forrest, A Sufficient Condition for an Integral Operator to Have a Trace 200

Inhaltsverzeichnis der Bände 191—200 216

Ausgabedaten der Hefte von Bd. 200

Heft 1/2 ausgegeben am 9. September 1958

Heft 3/4 ausgegeben am 15. Oktober 1958

Zur Theorie der Konstantenreduktion algebraischer Mannigfaltigkeiten.

Invarianz des arithmetischen Geschlechts einer Mannigfaltigkeit und der virtuellen Dimension ihrer Divisoren.

Von *Peter Roquette* in Hamburg.

Inhalt.

§ 1. Einleitung und Ergebnisse.
1. Einleitung 1
2. Der Satz von der Invarianz des arithmetischen Geschlechts bei Konstantenreduktionen 2
3. Reduktion von Divisoren. Der Satz von der Invarianz der virtuellen Dimension 4
4. Der Begriff eines Primdivisors in einem beliebigen Körper 5

§ 2. Invarianz des arithmetischen Geschlechts.
5. Genaue Formulierung der Irreduzibilitätsvoraussetzung 6
6. Ansatz zum Beweis von Satz I 7
7. Der Trägheitssatz für Bewertungsfortsetzungen und seine Ergänzungssätze 8
8. Bemerkungen zu der Wahl der Bezeichnung „träge" 9
9A. Beweis des Trägheitssatzes; 1. Teil 9
9B. Beweis des Trägheitssatzes; 2. Teil 17
10. Weitere Ergänzungen zum Trägheitssatz 18

§ 3. Reduktion von Divisoren. Invarianz der virtuellen Dimension.
11. Allgemeines über Vielfachenideale von Divisoren 20
12. Ansatz zum Beweis der Sätze II und III. Formulierung der Reduktionssätze für Vielfachenideale . 27
13. Genaue Formulierung der Konservativitätsvoraussetzung 28
14. Beweis der Reduktionssätze im Falle eines diskreten Primdivisors vom Rang 1 mit vollkommenem Restklassenkörper 30
15. Ergänzung für unvollkommene Restklassenkörper. Allgemeine Bemerkungen über die Vertauschbarkeit von Konstantenreduktionen und Konstantenerweiterungen 35
16. Beweis der Reduktionssätze für einen diskreten Primdivisor beliebigen endlichen Ranges. Allgemeines über die Zusammensetzung von Konstantenreduktionen 37
17. Beweis der Reduktionssätze für den Fall eines endlich-erzeugbaren Grundkörpers 38
18. Der allgemeine Fall 42

Literaturverzeichnis 43

§ 1. Einleitung und Ergebnisse.

1. Einleitung. In der Zahlentheorie ist es eine wichtige Aufgabe, die Beziehungen eines algebraischen Zahlkörpers $\mathfrak{k}$ zu seinem Restkörper $\mathfrak{k}\mathfrak{p}$ zu untersuchen, wobei $\mathfrak{p}$ einen Primdivisor von $\mathfrak{k}$ bedeutet. Im Rahmen dieser allgemeinen Aufgabe ist das folgende Problem von Bedeutung:

Gegeben sei eine algebraische Mannigfaltigkeit V über $\mathfrak{k}$; man untersuche die Beziehungen zwischen V und der Restmannigfaltigkeit $V\mathfrak{p}$ über $\mathfrak{k}\mathfrak{p}$. Dabei entsteht $V\mathfrak{p}$, indem man die Koeffizienten der definierenden Gleichungen für V modulo $\mathfrak{p}$ reduziert: $V\mathfrak{p}$ ist die Nullstellenmannigfaltigkeit des so entstehenden Gleichungssystems über $\mathfrak{k}$.

Im Falle der Dimension 1, also einer Kurve, wurde dieses Problem von Deuring [3] formuliert und in Angriff genommen; vgl. dazu in Weiterführung der Deuringschen Ansätze auch [4], [8]. Für höhere Dimension ist das Problem von Shimura [19] behandelt worden. In der vorliegenden Arbeit werden wir als Ergänzung zu den Shimuraschen Resultaten (jedoch unabhängig von ihnen) das arithmetische Geschlecht einer projektiven Mannigfaltigkeit und die virtuelle Dimension von Divisoren untersuchen. Unsere Ergebnisse enthalten im Falle der Dimension 1 die Deuringschen Ergebnisse als einen Spezialfall. Sie sind jedoch auch im Falle der Dimension 1 allgemeiner als die Deuringschen: Wir betrachten nämlich hier nicht nur das Geschlecht eines Funktionenkörpers, sondern allgemeiner auch das Geschlecht von Modellen dieses Funktionenkörpers im Sinne von Rosenlicht [13]. Im einzelnen vgl. dazu Abschnitt 2.

Eine genaue Formulierung und Diskussion der Ergebnisse findet sich in den nächsten Abschnitten. Es sei auch auf Abschnitt 7 hingewiesen; der dort formulierte Trägheitssatz ist auch an sich interessant (siehe Abschnitt 8), obwohl wir ihn hier nur als Hilfsmittel für unsere Beweise verwenden.

2. Der Satz von der Invarianz des arithmetischen Geschlechts bei einer Konstantenreduktion. Unser erstes Resultat bezieht sich auf das arithmetische Geschlecht einer projektiven Mannigfaltigkeit V über $\mathfrak{k}$, das wir mit $\chi(V)$ bezeichnen. Dieses wird am besten nach Serre [17] definiert durch die alternierende Summe

$$\chi(V) = \sum_i (-1)^i h^i(V),$$

wobei $h^i(V)$ die $\mathfrak{k}$-Dimension der i-ten Kohomologiegruppe von V mit Koeffizienten aus der Garbe der lokalen holomorphen Funktionen auf V über $\mathfrak{k}$ bedeutet. Dabei durchläuft i alle nichtnegativen ganzen Zahlen; die alternierende Summe bricht jedoch ab, weil nach Serre [17] gilt $h^i(V) = 0$ für $i > \dim V$. Es ist nach Serre bekannt, daß die angegebene Definition von $\chi(V)$ im wesentlichen mit der von Zariski [23] benutzten Definition des arithmetischen Geschlechts übereinstimmt.

Unser erstes Resultat lautet nun:

Satz I. *Ist V irreduzibel modulo $\mathfrak{p}$, so gilt*

$$\chi(V) = \chi(V\mathfrak{p}).$$

Eine genaue Formulierung der hier eingehenden Irreduzibilitätsvoraussetzung findet sich in Abschnitt 5.

Im Falle einer Kurve haben Deuring und Lamprecht ebenfalls Sätze über das Verhalten des Geschlechts bei Konstantenreduktion bewiesen. Der Unterschied zu unseren Ergebnissen liegt darin, daß Deuring und Lamprecht nur die Geschlechter der *Funktionenkörper* K von V bzw. $\mathsf{K}\mathfrak{p}$ von $V\mathfrak{p}$ betrachten. Unsere Überlegungen sind demnach feiner, da sie sich auch auf *Modelle* dieser Funktionenkörper beziehen. Das kommt insbesondere darin zum Ausdruck, daß dort die Invarianz des Geschlechts nur bei *fast allen* Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{k}$ behauptet werden kann. Unser Ergebnis gilt dagegen ganz allgemein.

Im einzelnen lassen sich die Deuringschen Ergebnisse folgendermaßen aus Satz I herleiten:

Es sei $\dim V = 1$; dann ist auch $\dim V\mathfrak{p} = 1$. Wie Deuring nehmen auch wir an, daß $\mathfrak{k}$ im Funktionenkörper K von V, und $\mathfrak{k}\mathfrak{p}$ im Funktionenkörper $\mathsf{K}\mathfrak{p}$ von $V\mathfrak{p}$ algebraisch abgeschlossen sind. Es gilt dann bekanntlich

$$\chi(V) = 1 - g(V), \quad \chi(V\mathfrak{p}) = 1 - g(V\mathfrak{p}),$$

wobei $g(V)$ und $g(V\mathfrak{p})$ die Geschlechter von V bzw. $V\mathfrak{p}$ im Sinne des Riemann-Rochschen Satzes sind; vgl. Rosenlicht [13]. Und zwar hängen diese mit den Geschlechtern ihrer Funktionenkörper durch die folgenden Formeln zusammen:

$$g(V) = g(\mathsf{K}) + \delta(V), \quad g(V\mathfrak{p}) = g(\mathsf{K}\mathfrak{p}) + \delta(V\mathfrak{p});$$

dabei sind die „Singularitätszahlen" $\delta(V)$, $\delta(V\mathfrak{p})$ stets $\geqq 0$ und berechnen sich in genau angebbarer Weise aus der Struktur der Singularitäten von V bzw. $V\mathfrak{p}$. Siehe dazu Rosenlicht [13] S. 178. Insbesondere ist $\delta(V) = 0$ genau dann, wenn V singularitätenfrei ist, und entsprechendes gilt für $V\mathfrak{p}$.

Es sei nun V ein singularitätenfreies projektives Modell von K; dies ist bekanntlich bis auf bireguläre Äquivalenz eindeutig bestimmt, und zu jedem Funktionenkörper K vom Transzendenzgrad 1 gibt es ein solches. Aus dem eben Gesagten und Satz I ergibt sich (unter der Voraussetzung, daß $V\mathfrak{p}$ irreduzibel ist modulo $\mathfrak{p}$)

$$g(\mathsf{K}) = g(\mathsf{K}\mathfrak{p}) + \delta(V\mathfrak{p}).$$

Diese Relation ist eine Verfeinerung der Deuringschen Ungleichung $g(\mathsf{K}) \geqq g(\mathsf{K}\mathfrak{p})$. Sie enthält insbesondere die Aussage, daß genau dann $g(\mathsf{K}) = g(\mathsf{K}\mathfrak{p})$ gilt, wenn $V\mathfrak{p}$ singularitätenfrei ist über $\mathsf{k}\mathfrak{p}$.

Demnach läßt sich das Phänomen, daß sich das Geschlecht eines Funktionenkörpers K *vom Transzendenzgrad* 1 *bei Konstantenreduktion erniedrigen kann, dadurch erklären, daß bei Reduktion eines singularitätenfreien Modells* V *von* K *neue Singularitäten auftreten können.*

Betrachten wir schließlich noch mit Deuring den Fall, wo K über k konservativ ist. Das soll heißen: (a) K ist über k separabel, und k ist in K algebraisch abgeschlossen; (b) das Geschlecht von K bleibt invariant bei beliebiger Konstantenerweiterung. Für das singularitätenfreie Modell V von K bedeutet das:

(a) V ist irreduzibel bei jeder Konstantenerweiterung; (b) V ist singularitätenfrei bei jeder Konstantenerweiterung. Wir wollen V *konservativ* nennen, wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind. (Für eine genaue Präzisierung dieser Bedingungen siehe Abschnitt 13.)

Deuring [4] zeigte nun für einen konservativen Funktionenkörper K vom Transzendenzgrad 1, daß $\mathsf{K}\mathfrak{p}$ konservativ ist für fast alle Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von k, und daß für diese fast allen $\mathfrak{p}$ gilt $g(\mathsf{K}) = g(\mathsf{K}\mathfrak{p})$. Diese Aussage läuft nach Satz I und dem oben Gesagten auf den Beweis des folgenden Satzes hinaus:

Satz. *Ist* V *konservativ, so ist* $V\mathfrak{p}$ *konservativ für fast alle Primdivisoren* $\mathfrak{p}$ *von* k.

Dabei bedeutet die Aussage „fast alle" wie üblich folgendes: Es soll endlich viele Elemente $u_1, \ldots, u_t$ in k geben darart, daß die Aussage des Satzes richtig ist für alle diejenigen $\mathfrak{p}$, für welche $u_1\mathfrak{p} \neq \infty, \ldots, u_t\mathfrak{p} \neq \infty$.

Die Gültigkeit dieses Satzes ist nun keineswegs auf Kurven beschränkt; vielmehr gilt sie für projektive (und auch affine) Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension. Nach Zariski [22] läßt sich nämlich die Konservativität von V ausdrücken durch eine Rangbedingung für die Jacobische Matrix von V, und der Rang einer Matrix bleibt bei fast allen $\mathfrak{p}$ erhalten. Auf eine genaue Ausführung dieses Beweises möge hier verzichtet werden, da er ohnehin sehr einfach ist und wir den obigen Satz in dieser Arbeit nicht verwenden werden. Vgl. auch die Ausführungen in Abschnitt 13.

Bemerkung. Der obige Satz gilt auch dann noch, wenn man den in die Definition von „konservativ" eingehenden Begriff „singularitätenfrei" ersetzt durch „ganzab-

gesschlossen"[1]). Der Beweis wird mit den einschlägigen Methoden von Seidenberg [14] geführt. Der Satz gilt jedoch nicht mehr, wenn man lediglich die Singularitätenfreiheit (bzw. Ganzabgeschlossenheit) *über* $\mathfrak{k}$ fordert; hierauf hat kürzlich Lamprecht [9] hingewiesen. In dieser Hinsicht unterscheidet sich also die Theorie der Konstantenreduktionen von der Theorie der Hyperflächenschnitte bei Seidenberg [16].

3. Reduktion von Divisoren. Der Satz von der Invarianz der virtuellen Dimension. Wir kommen nunmehr zur Formulierung unseres zweiten Ergebnisses. Dieses bezieht sich auf die *Divisoren* von V und $V\mathfrak{p}$. Zu seiner Gültigkeit müssen wir die folgende Voraussetzung machen:

V sei konservativ modulo $\mathfrak{p}$.

Eine genaue Präzisierung dieser Voraussetzung findet sich in Abschnitt 13. Unter dieser Voraussetzung beweisen wir zunächst

Satz II. *Es gibt in natürlicher Weise einen Homomorphismus der Divisorgruppe von V in die Divisorgruppe von $V\mathfrak{p}$, unter Erhaltung der arithmetischen Relationen der Teilbarkeit und der (linearen) Äquivalenz zwischen Divisoren.*

Im Falle einer Kurve hat Deuring [3] einen solchen Homomorphismus konstruiert; unsere Konstruktion wird eine direkte Verallgemeinerung der Deuringschen Konstruktion sein. Übrigens wurde für beliebige Dimension ein Homomorphismus der angegebenen Art auf eine etwas andere Weise von Shimura [19] konstruiert. Es ist leicht zu beweisen, daß der von Shimura angegebene Homomorphismus mit unserem Homomorphismus übereinstimmt. Der Grund, weshalb wir hier unabhängig von Shimura vorgehen, ist der, daß unsere Konstruktion uns unmittelbar den folgenden Satz liefern wird. Dieser stellt unser drittes und wichtigstes Ergebnis in dieser Arbeit dar.

Satz III. *Die virtuelle Dimension eines Divisors bleibt bei dem in Satz II erwähnten Homomorphismus invariant.*

Dabei bezeichnen wir als virtuelle Dimension eines Divisors A von V die alternierende Summe

$$\chi(A) = \sum_i (-1)^i h^i(A),$$

wobei $h^i(A)$ die $\mathfrak{k}$-Dimension der i-ten Kohomologiegruppe von V mit Koeffizienten aus der Garbe der lokal durch A teilbaren Funktionen auf V über $\mathfrak{k}$ ist. Bekanntlich ist $h^0(A)$ gleich der $\mathfrak{k}$-Dimension des Moduls der global durch A teilbaren Funktionen auf V über $\mathfrak{k}$, also gleich der klassischen „Dimension" des Divisors A[2]). Demnach unterscheidet sich also $\chi(A)$ von der „Dimension" von A nur um die alternierende Summe der Zusatzglieder $h^i(A)$ für $i > 0$; das erklärt die Bezeichnung „virtuelle Dimension". Übrigens ist für den Nulldivisor $A = 0$ das arithmetische Geschlecht $\chi(0) = \chi(V)$.

Im Falle der Dimension 1 ist nach dem Riemann-Rochschen Satz

$$\chi(A) = \chi(V) - \operatorname{Grad}(A).$$

In diesem Falle besagt also Satz III, daß der Grad eines Divisors A bei dem in Satz II genannten Homomorphismus erhalten bleibt. Dieses Ergebnis findet sich auch bei Deuring. Übrigens wird sich zeigen, daß auch bei höherdimensionalen Mannigfaltigkeiten der Grad eines Divisors bei Reduktion modulo $\mathfrak{p}$ invariant ist. Da aber für $\dim V > 1$ der Grad eines Divisors keine bireguläre Invariante ist und wesentlich von der Einbettung von V in den projektiven Raum abhängt, so verzichten wir auf eine besondere Formulierung dieser Tatsache.

[1]) „locally normal everywhere" in der Zariskischen Terminologie.

[2]) Genauer ist $h^0(A)$ die Dimension des negativen Divisors $-A$ im Sinne der klassischen Bezeichnungsweise.

Bemerkung. Es ist fraglich, ob die oben angegebene Konservativitätsforderung wirklich notwendig ist für die Gültigkeit der Sätze II und III. Vielleicht genügt es schon, nur die Singularitätenfreiheit von V über $\mathfrak{k}$ und von $V\mathfrak{p}$ über $\mathfrak{k}\mathfrak{p}$ zu fordern. Es ist uns nicht gelungen, diese Frage zu entscheiden. Wir haben jedoch den Beweis soweit wie möglich unter der angegebenen schwächeren Voraussetzung der Singularitätenfreiheit über dem gegebenen Grundkörper geführt. Es zeigt sich, daß man in gewissen Fällen mit dieser schwächeren Voraussetzung vollständig auskommt. In Abschnitt 14 werden wir zeigen, daß dies für diskretes $\mathfrak{p}$ in den folgenden Fällen der Fall ist:

(i) wenn $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}\mathfrak{p}$ dieselbe Charakteristik besitzen;

(ii) wenn die Verzweigungsordnung von $\mathfrak{p}$ nicht durch die Charakteristik des Restklassenkörpers teilbar ist;

(iii) wenn $\dim V = 1$ ist.

Die Entscheidung darüber, ob man sogar in allen Fällen mit der schwächeren Voraussetzung auskommt, hängt davon ab, ob sich die folgende Vermutung von Krull als richtig erweist: „Jeder reguläre Stellenring ist ein ZPE-Ring." Für nähere Einzelheiten vgl. Abschnitt 14.

4. Der Begriff eines Primdivisors in einem beliebigen Körper. In Abschnitt 1 wurde gesagt, daß $\mathfrak{k}$ ein algebraischer Zahlkörper sein soll. Diese Voraussetzung ist jedoch für die Gültigkeit der Sätze I, II, III ganz unerheblich. *Vielmehr darf* $\mathfrak{k}$ *ein beliebiger Körper und* $\mathfrak{p}$ *ein Primdivisor von* $\mathfrak{k}$ *sein.*

Zur Klarstellung unserer Terminologie sagen wir jetzt, was wir unter einem Primdivisor in einem beliebigen Körper $\mathfrak{k}$ verstehen wollen.

Eine *Bewertung* w von $\mathfrak{k}$ ist eine Funktion auf $\mathfrak{k}$ mit Werten aus einer total geordneten abelschen Gruppe $\mathfrak{g}$ (der das Element $+\infty$ adjungiert ist) mit den Rechenregeln

$$w(a) = +\infty \text{ nur für } a = 0;$$
$$w(a+b) \geqq \operatorname{Min}\big(w(a), w(b)\big);$$
$$w(ab) = w(a) + w(b).$$

Isomorphe Bewertungen (welche sich nur um einen ordnungserhaltenden Isomorphismus der Wertgruppen unterscheiden) werden nicht als verschieden betrachtet.

Ein *Ort* π von $\mathfrak{k}$ ist eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{k}$ auf einen Bildkörper $\mathfrak{k}'$, wobei wir uns zu $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$ das Element ∞ mit der Rechenregel $\frac{1}{\infty} = 0$ adjungiert denken. Isomorphe Örter werden als gleich betrachtet.

Ein *Bewertungsring* $\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{k}$ ist ein Teilring von $\mathfrak{k}$ mit der Eigenschaft: Für jedes Element $a \in \mathfrak{k}$ ist entweder $a \in \mathfrak{o}$ oder $a^{-1} \in \mathfrak{o}$. Er besitzt genau ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$, bestehend aus allen $a \in \mathfrak{o}$ mit $a^{-1} \notin \mathfrak{o}$.

Aus der allgemeinen Bewertungstheorie ist nun folgendes bekannt (vgl. [10], [15]): Es besteht eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den sämtlichen Bewertungen w von $\mathfrak{k}$ einerseits, den Örtern π von $\mathfrak{k}$ andererseits, und den Bewertungsringen $\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{k}$ auf dritter Seite. Und zwar wird diese Beziehung hergestellt, indem man jeder Bewertung w den durch $w(a) \geqq 0$ definierten Bewertungsring zuordnet, und jedem Ort π den durch $a\pi \neq \infty$ definierten Bewertungsring.

Wir definieren nun:

Ein zusammengehöriges Tripel $w, \pi, \mathfrak{o}$ *heißt ein Primdivisor von* $\mathfrak{k}$.

Wir bezeichnen einen Primdivisor von $\mathfrak{k}$ meist mit $\mathfrak{p}$ und schreiben demgemäß $w_\mathfrak{p}, \pi_\mathfrak{p}, \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ (und $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$). Es ist für alle Betrachtungen völlig unerheblich, ob man die Bewer-

tungen, die Örter oder die Bewertungsringe in den Vordergrund stellt, und man wird daher je nach der Natur des zu behandelnden Problems mit dem diesem Problem angepaßten Begriff arbeiten.

Für die Untersuchungen dieser Arbeit erweist es sich als zweckmäßig, häufig mit Örtern zu arbeiten. Zur Vereinfachung der Schreibweise schreiben wir daher statt $\pi_{\mathfrak{p}}$ einfacher $\mathfrak{p}$, so daß sich also der zu dem Primdivisor $\mathfrak{p}$ von k gehörige Ort als die Abbildung $a \to a\mathfrak{p}$ (für $a \in \mathsf{k}$) darstellt.

Bemerkung. Deuring, Lamprecht und Shimura setzen immer voraus, daß es sich um einen diskreten Primdivisor vom Range 1 handelt (d. h. die Wertgruppe von $\mathfrak{p}$ soll isomorph zur additiven Gruppe der ganzrationalen Zahlen sein). Wir machen diese Voraussetzung nicht. Insofern ist also unser Ansatz allgemeiner als dort. Dieser allgemeine Ansatz ermöglicht eine bequeme Handhabung unserer Theorie bei manchen Anwendungen. Er befindet sich im Einklang mit unseren Untersuchungen in der Arbeit [12], in der wir eine Spezialisierungstheorie für Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1 auf den Begriff der allgemeinen Bewertung aufgebaut haben. Übrigens lassen sich die Resultate aus [12], § 2 als Spezialfälle unserer viel allgemeineren Sätze in dieser Arbeit auffassen.

Man vergleiche auch die Bemerkung am Schlusse dieser Arbeit.

Zur Bezeichnung: Die Numerierung der Formeln, Lemmate usw. beginnt in jedem Abschnit von neuem. Bei Rückverweisungen wird daher stets auch die betreffende Abschnittsnummer angegeben, außer wenn es sich um eine Formel aus demselben Abschnitt handelt.

§ 2. Invarianz des arithmetischen Geschlechts.

5. Genaue Formulierung der Irreduzibilitätsvoraussetzung. V sei eingebettet in den projektiven Raum von n Dimensionen über k. Wir betrachten demgemäß ein System $x = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ von $n+1$ Unbestimmten, sowie den zugehörigen Polynomring

$$\mathsf{S} = \mathsf{k}[x].$$

Gemäß der Tatsache, daß wir *projektive* Mannigfaltigkeiten betrachten, haben wir S als *graduierten* Ring aufzufassen, wobei die Graduierung durch den gewöhnlichen Polynomgrad geliefert wird. Bedeutet S_ν den k-Modul der homogenen Polynome ν-ten Grades aus S, so drückt sich die Tatsache, daß S graduiert ist, in der direkten Zerlegung $\mathsf{S} = \sum_\nu \mathsf{S}_\nu$ und den Multiplikationsformeln $\mathsf{S}_\mu \mathsf{S}_\nu = \mathsf{S}_{\mu+\nu}$ aus. Ein Ideal I aus S heißt graduiert, wenn es sich als direkte Summe seiner homogenen Komponenten $\mathsf{I}_\nu = \mathsf{I} \cap \mathsf{S}_\nu$ schreiben läßt.

Zu V als projektiver Mannigfaltigkeit gehört in S ein graduiertes Ideal $\mathsf{I}(V)$ als sein *Relationenideal*, bestehend aus all denjenigen Polynomen $f(x)$ aus S, welche alle Punkte aus V als Nullstellen besitzen. Man nennt V *irreduzibel*, wenn $\mathsf{I}(V)$ ein Primideal ist.

Man betrachte nun diejenigen Polynome $f(x)$ aus S, welche $\mathfrak{p}$-ganze Koeffizienten besitzen. Wir bezeichnen mit $f\mathfrak{p}(x)$ das aus $f(x)$ durch Reduktion der Koeffizienten modulo $\mathfrak{p}$ entstehende Polynom aus $\mathsf{k}\mathfrak{p}[x]$. Ist I eine beliebige Teilmenge aus S, so bezeichnen wir mit $\mathsf{I}\mathfrak{p}$ die Menge der Polynome $f\mathfrak{p}(x)$ mit $\mathfrak{p}$-ganzem $f(x)$ aus I. Offenbar gilt dabei

$$\mathsf{S}\mathfrak{p} = \mathsf{k}\mathfrak{p}[x].$$

Ist ferner I ein Ideal aus S, so ist offenbar $\mathsf{I}\mathfrak{p}$ ein Ideal aus $\mathsf{S}\mathfrak{p}$. Ist dabei I graduiert, so ist auch $\mathsf{I}\mathfrak{p}$ graduiert, denn homogene Polynome aus S mit $\mathfrak{p}$-ganzen Koeffizienten gehen modulo $\mathfrak{p}$ in homogene Polynome gleichen Grades über.

Gemäß den Ausführungen in der Einleitung ist nun die Restmannigfaltigkeit $V\mathfrak{p}$ definiert als die Nullstellenmannigfaltigkeit des Ideals $\mathfrak{l}(V)\,\mathfrak{p}$. Demnach ist also das volle Relationenideal $\mathfrak{l}(V\mathfrak{p})$ gleich dem Radikal von $\mathfrak{l}(V)\,\mathfrak{p}$. Insbesondere ist $V\mathfrak{p}$ genau dann irreduzibel, wenn das Radikal von $\mathfrak{l}(V)\,\mathfrak{p}$ ein Primideal ist.

Definition. *V heißt irreduzibel modulo $\mathfrak{p}$, wenn $\mathfrak{l}(V)\,\mathfrak{p}$ ein Primideal ist.*

In diesem Sinne ist also die Irreduzibilitätsvoraussetzung in Satz I zu verstehen[3]. Ist V irreduzibel modulo $\mathfrak{p}$, so ergibt sich aus dem oben Gesagten die Formel

$$\mathfrak{l}(V)\,\mathfrak{p} = \mathfrak{l}(V\mathfrak{p}); \tag{1}$$

insbesondere ist dann also $V\mathfrak{p}$ irreduzibel. Man bemerke ferner, daß in der obigen Definition die Irreduzibilität von V nicht vorausgesetzt wird. Diese ergibt sich vielmehr als Folgerung aus der Irreduzibilität von V modulo $\mathfrak{p}$; es gilt nämlich das folgende

Lemma 1. *Ist $\mathfrak{l}$ ein graduiertes Ideal aus S, und ist $\mathfrak{l}\mathfrak{p}$ ein Primideal, so ist auch $\mathfrak{l}$ ein Primideal.*

Da sich später, im Laufe unserer Untersuchungen, ein Beweis dieses Lemmas von selbst ergeben wird, verzichten wir an dieser Stelle auf einen Beweis. Vgl. Abschnitt 9A, Bemerkung 1. Übrigens gilt Lemma 1 nicht mehr allgemein, wenn man auf die Forderung, daß $\mathfrak{l}$ graduiert sein soll, verzichtet.

6. Ansatz zum Beweis von Satz I. Zur Abkürzung schreiben wir $\mathfrak{l}$ an Stelle von $\mathfrak{l}(V)$. Es sei weiter

$$\mathsf{R} = \mathsf{S}/\mathfrak{l}$$

der zugehörige Restklassenring. Bedeutet y das System der Restklassen von x modulo $\mathfrak{l}$, so ist $\mathsf{R} = \mathsf{k}[y]$ der graduierte Koordinatenring eines allgemeinen Punktes y von V. Setzt man $\mathsf{R}_\nu = \mathsf{S}_\nu/\mathfrak{l}_\nu$, so drückt sich die Graduierung von R in der direkten Summenzerlegung $\mathsf{R} = \sum_\nu \mathsf{R}_\nu$ und den Multiplikationsformeln $\mathsf{R}_\mu \mathsf{R}_\nu = \mathsf{R}_{\mu+\nu}$ aus.

Es ist nun bekannt, daß sich die Dimension von R_ν als k-Modul für hinreichend große ν als Werte eines Polynoms $\chi_{\mathsf{R}}(\nu)$ berechnet:

$$\chi_{\mathsf{R}}(\nu) = \dim_{\mathsf{k}} \mathsf{R}_\nu.$$

Man nennt χ_{R} das *Hilbertsche Polynom* von R, oder auch von V. Es ist weiter bekannt, daß der konstante Koeffizient des Hilbertschen Polynoms gerade gleich dem arithmetischen Geschlecht von V ist:

$$\chi_{\mathsf{R}}(0) = \chi(V).$$

Siehe dazu Serre [17], S. 275, Prop. 4.[4] Demnach genügt es also zum Beweis von Satz I zu zeigen, daß die Hilbertschen Polynome von V und von $V\mathfrak{p}$ übereinstimmen. Das läuft nach ihrer Definition auf den Beweis der Formeln

$$\dim_{\mathsf{k}} \mathsf{R}_\nu = \dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{R}_\nu\mathfrak{p} \tag{1}$$

für hinreichend große ν hinaus; wir werden jedoch zeigen, daß diese Formeln sogar für alle ν richtig sind. In (1) soll $\mathsf{R}_\nu\mathfrak{p}$ für $V\mathfrak{p}$ dieselbe Bedeutung haben wie R_ν für V, nämlich die ν-te homogene Komponente des graduierten Koordinatenringes $\mathsf{R}\mathfrak{p} = \mathsf{S}\mathfrak{p}/\mathfrak{l}\mathfrak{p}$ von $V\mathfrak{p}$.

---

[3]) Entsprechende Irreduzibilitätsvoraussetzungen finden sich auch bei Deuring [3] und Shimura [19]. Bei Deuring heißt es: „$\mathfrak{p}$ bleibe prim"; und bei Shimura: „V sei $\mathfrak{p}$-einfach".

[4]) Bei Serre [17] wird vorausgesetzt, daß der Grundkörper k algebraisch abgeschlossen ist. Diese Voraussetzung ist jedoch unwesentlich. Will man die Serreschen Resultate nicht benutzen, so *definiere* man einfach das arithmetische Geschlecht $\chi(V)$ als den konstanten Koeffizienten des Hilbertschen Polynoms von R.

Entsprechendes gilt für die in Abschn. 12 zu besprechende virtuelle Dimension eines V-Divisors.

Wesentlich für den Beweis von (1) ist nun, daß sich der $\mathfrak{k}\mathfrak{p}$-Modul $\mathsf{R}_\nu\mathfrak{p}$ auch noch auf eine andere Weise beschreiben läßt, nämlich als der Restmodul von R_ν in bezug auf einen gewissen Primdivisor. Um das zu beschreiben, holen wir etwas weiter aus.

7. Der Trägheitssatz für Bewertungsfortsetzungen und seine Ergänzungssätze. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

K^* sei der Quotientenkörper von R, also $\mathsf{K}^* = \mathsf{k}(y)$.

K sei der Funktionenkörper von V, also der durch die Quotienten $y_i/y_j (y_j \neq 0)$ über k erzeugte Körper. Wir schreiben dafür $\mathsf{K} = \mathsf{k}(y_0 : y_1 : \cdots : y_n)$.

Mit Hilfe der Graduierung von R läßt sich K innerhalb K^* folgendermaßen kennzeichnen: Ein Element $a \neq 0$ aus K^* heißt *homogen* vom Grade ν, wenn es eine Quotientendarstellung $a = u/v$ mit homogenen Elementen $u, v \in \mathsf{R}$ zuläßt, wobei ν gleich der Differenz der Grade von u und v ist. Die Menge K^*_ν der homogenen Elemente ν-ten Grades bildet einen k-Modul, und es gilt offenbar: $\mathsf{K}^*_\mu \mathsf{K}^*_\nu = \mathsf{K}^*_{\mu+\nu}$. Hieraus folgt, daß die Menge K^*_0 der homogenen Elemente nullten Grades sogar ein Körper ist; dieser Körper ist, wie leicht zu zeigen, gerade gleich K[5]).

Wir formulieren nunmehr einen sogenannten „Trägheitssatz" und einige Ergänzungen dazu; aus diesem wird sich dann die zu beweisende Relation 6, (1) ergeben.

Trägheitssatz. *Es gibt genau einen Primdivisor $\mathfrak{P}$ von K, welcher eine Fortsetzung von $\mathfrak{p}$ ist, und für welchen $y_0\mathfrak{P} : y_1\mathfrak{P} : \cdots : y_n\mathfrak{P}$ gleich dem System der Koordinatenverhältnisse eines allgemeinen Punktes von $V\mathfrak{p}$ über $\mathsf{k}\mathfrak{p}$ ist. $\mathfrak{P}$ ist als Fortsetzung von $\mathfrak{p}$ träge im Sinne der nachfolgenden Definition.*

Definition. *Es sei K ein Erweiterungskörper von k und $\mathfrak{P}$ eine Primdivisorfortsetzung von $\mathfrak{p}$ in K. Wir nennen $\mathfrak{P}$ träge über $\mathfrak{p}$ (oder über k), wenn für jeden endlichdimensionalen k-Teilmodul M von K gilt* $\dim_{\mathsf{k}} \mathsf{M} = \dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{M}\mathfrak{P}$.

Dieser Trägheitssatz ist im wesentlichen identisch mit einem Satz bei Deuring [3], S. 645. Der Unterschied gegenüber Deuring besteht hier darin, daß hier der zugrundegelegte Primdivisor $\mathfrak{p}$ von k nicht notwendig diskret und vom Range 1 zu sein braucht. Gemäß dieser allgemeineren Situation werden wir hier einen neuen und einfacheren Beweis des Trägheitssatzes geben. Zur Wahl der Bezeichnung „träge" siehe die Bemerkungen in Abschnitt 8.

Die im folgenden zu besprechenden Ergänzungen zum Trägheitssatz beziehen sich auf die Fortsetzung von $\mathfrak{P}$ als Primdivisor von K^*. Man bemerke nämlich, daß die $y_i\mathfrak{P}$ als Elemente gar nicht definiert sind, weil ja y_i (falls $y_i \neq 0$) nicht in K liegt, sondern transzendent über K ist. Nur die Verhältnisse $y_0\mathfrak{P} : y_1\mathfrak{P} : \cdots : y_n\mathfrak{P}$ sind wohldefiniert. Um diese unbequeme Situation zu verbessern, muß man $\mathfrak{P}$ auf K^* fortsetzen.

1. Ergänzungssatz. *Es gibt genau eine Fortsetzung $\mathfrak{P}^*$ von $\mathfrak{P}$ auf K^* derart, daß $y\mathfrak{P}^*$ gleich dem System der homogenen Koordinaten eines allgemeinen Punktes von $V\mathfrak{p}$ über $\mathsf{k}\mathfrak{p}$ ist. $\mathfrak{P}^*$ ist als Fortsetzung von $\mathfrak{p}$ träge.*

2. Ergänzungssatz. *Der Bildring $\mathsf{R}\mathfrak{P}^*$ ist gleich dem graduierten Koordinatenring $\mathsf{R}\mathfrak{p}$ eines allgemeinen Punktes von $V\mathfrak{p}$. Und zwar ist das Bild der ν-ten homogenen Komponente von R gleich der ν-ten homogenen Komponente von $\mathsf{R}\mathfrak{p}$; also in Formeln*

$$\mathsf{R}_\nu\mathfrak{P}^* = \mathsf{R}_\nu\mathfrak{p}.$$

[5]) Für die hier und im folgenden benutzten elementaren Tatsachen aus der projektiven Geometrie vgl. z. B. Lang [10].

Aus diesem 2. Ergänzungssatz folgt, daß die zu beweisende Relation 6, (1) gleichbedeutend ist mit der Relation

$$\dim_{\mathsf{k}} \mathsf{R}_{\mathfrak{p}} = \dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{R}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{P}^*.$$

Dies wiederum ist eine unmittelbare Folge aus der Trägheitsaussage des 1. Ergänzungssatzes.

Damit hat sich also ergeben, daß der Beweis von Satz I zurückläuft auf den Beweis des Trägheitssatzes und seiner beiden Ergänzungssätze.

8. Bemerkungen zu der Wahl der Bezeichnung „träge". Ist k ein algebraischer Zahlkörper, und ist K eine endlich-algebraische Erweiterung von k, so pflegt man eine Primdivisorfortsetzung $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ auf K genau dann als „träge" zu bezeichnen, wenn folgendes gilt: Erstens soll $\mathfrak{P}$ die einzige Fortsetzung von $\mathfrak{p}$ auf K sein, und zweitens soll $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{p}$ unverzweigt sein. Bekanntlich ist dies gleichbedeutend mit der Relation

$$(1) \qquad [\mathsf{K} : \mathsf{k}] = [\mathsf{K}\mathfrak{P} : \mathsf{k}\mathfrak{p}],$$

wobei $[\mathsf{K} : \mathsf{k}]$ den gewöhnlichen Körpergrad bezeichnet, also die Dimension von K als k-Modul. Die Relation (1) bedeutet also $\dim_{\mathsf{k}} \mathsf{K} = \dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{K}\mathfrak{P}$. Wir werden später sehen (Abschnitt 9A, Folgerung 3), daß diese Relation gleichbedeutend ist mit der Relation $\dim_{\mathsf{k}} \mathsf{M} = \dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{M}\mathfrak{P}$ für jeden k-Teilmodul M von K. Demnach erscheint also die übliche, aus der Zahlentheorie bekannte Trägheitsdefinition als ein Spezialfall der in dieser Arbeit gegebenen Definition. Und zwar ist, wie ich meine, die hier gegebene Definition gerade die richtige Verallgemeinerung. Man beachte, daß bei unserer Definition weder über die Natur der Körpererweiterung K/k, noch über die der Primdivisoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{p}$ irgendeine Voraussetzung gemacht werden muß.

Die Eindeutigkeitsaussage im Trägheitssatz ist demnach als die Verallgemeinerung des oben erwähnten, für endlich-algebraische Zahlkörpererweiterungen bekannten Satzes anzusehen, daß $\mathfrak{P}$, falls (1) gilt, die *einzige* Fortsetzung von $\mathfrak{p}$ auf K ist. Es überrascht nicht, daß bei höherem Transzendenzgrad dieser Satz nicht mehr in birational invarianter Form gilt, sondern daß auf ein *Modell V* von K Bezug genommen werden muß, um Eindeutigkeit zu erreichen[6]).

Übrigens werden wir sehen, daß eine in unserem Sinne träge Fortsetzung von $\mathfrak{p}$ gleichzeitig *unverzweigt* ist in dem Sinne, daß seine Wertgruppe gleich der Wertgruppe von $\mathfrak{p}$ ist. Auch in dieser Hinsicht herrschen also im allgemeinen Falle dieselben Verhältnisse wie im endlich-algebraischen Falle.

Im Hinblick auf die Eindeutigkeitsaussage im Trägheitssatz ist es erlaubt, der Einfachheit halber $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^*$ mit $\mathfrak{p}$ zu identifizieren:

$$(2) \qquad \mathfrak{P}^* = \mathfrak{P} = \mathfrak{p}.$$

(Das geht natürlich nur solange, wie das Modell V von K fest bleibt.) Diese Schreibweise befindet sich im Einklang mit der bei endlich-algebraischen Zahlkörpererweiterungen üblichen Schreibweise (vgl. etwa Hasse [5]). Sie befindet sich ferner im Einklang mit der Schreibweise $\mathsf{R}\mathfrak{p}$, $\mathsf{R}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}$ im Hinblick auf den 2. Ergänzungssatz.

9A. Beweis des Trägheitssatzes; 1. Teil. Wir werden den Beweis des Trägheitssatzes und seiner beiden Ergänzungen in zwei Teilen führen. Im 1. Teil werden wir uns damit beschäftigen, einen gewissen, durch das Modell V in „natürlicher" Weise gegebenen Primdivisor $\mathfrak{P}^*$ von K^* zu konstruieren. Im 2. Teil werden wir dann zeigen,

[6]) Übrigens hat Lamprecht [9] bei Transzendenzgrad 1 eine vom Modell V unabhängige Eindeutigkeitsaussage erhalten durch die zusätzliche Forderung, daß die Geschlechter von K und $\mathsf{K}\mathfrak{p}$ übereinstimmen sollen.

daß $\mathfrak{P}^*$ und der von $\mathfrak{P}^*$ in K induzierte Primdivisor $\mathfrak{P}$ gerade die im Trägheitssatz und seinen beiden Ergänzungssätzen aufgeführten Eigenschaften besitzen. Wir beginnen mit dem 1. Teil.

Um eine Bewertung $w_{\mathfrak{P}^*}$ von K^* zu definieren, genügt es, $w_{\mathfrak{P}^*}(a)$ für Elemente a aus R anzugeben, denn K^* ist ja der Quotientenkörper von R. Um eine Bewertung von R zu erhalten, stellen wir R seiner Definition gemäß als Restklassenring $\mathsf{R} = \mathsf{S}/\mathsf{I}$ dar. Im Polynomring $\mathsf{S} = \mathsf{k}[x]$ haben wir in natürlicher Weise eine Bewertung $w_{\mathfrak{p}(x)}$ vorgegeben, nämlich die sogenannte *Funktionalbewertung*, welche für jedes Polynom $f(x)$ als Wert $w_{\mathfrak{p}(x)}(f(x))$ das Minimum der $\mathfrak{p}$-Werte der Koeffizienten von $f(x)$ angibt. Zum Begriff der Funktionalbewertung vgl. etwa Hasse [5] S. 133ff. Um nun aus der Bewertung $w_{\mathfrak{p}(x)}$ von S eine Bewertung $w_{\mathfrak{P}^*}$ von $\mathsf{R} = \mathsf{S}/\mathsf{I}$ zu erhalten, machen wir den Ansatz

$$(1) \qquad w_{\mathfrak{P}^*}(a) = \operatorname{Max}\left(w_{\mathfrak{p}(x)}(f);\ f \in a\right) \qquad \text{für } a \in \mathsf{R}.$$

Man beachte dazu, daß a als Element von $\mathsf{R} = \mathsf{S}/\mathsf{I}$ gleich einer Restklasse modulo I ist; die Relation $f \in a$ bedeutet daher, daß das Polynom f in der Restklasse a liegt. Zu dem Ansatz (1), der als ein „natürlicher" Ansatz erscheint, vgl. Bourbaki [1], S. 65, Nr. 29.

Damit dieser Ansatz (1) überhaupt sinnvoll ist, haben wir zunächst zu zeigen, daß für jedes Element $a \neq 0$ aus R das Maximum in (1) existiert und $< +\infty$ ist (für $a = 0$ ist das Maximum in (1) gleich $+\infty$). Dazu werden wir beweisen

Lemma 1. *Zu jedem graduierten* k*-Teilmodul* I *von* S *gibt es einen komplementären* k*-Teilmodul* I' *in* S *derart, daß für jedes Element* $f \in \mathsf{S}$ *mit der Darstellung*

$$f = f_{\mathsf{I}} + f_{\mathsf{I}'}, \quad \textit{mit } f_{\mathsf{I}} \in \mathsf{I},\ f_{\mathsf{I}'} \in \mathsf{I}'$$

gilt

$$w_{\mathfrak{p}(x)}(f) = \operatorname{Min}\left(w_{\mathfrak{p}(x)}(f_{\mathsf{I}}),\ w_{\mathfrak{p}(x)}(f_{\mathsf{I}'})\right).$$

Nehmen wir im Augenblick einmal an, dieses Lemma sei bereits bewiesen. Zu jedem Element $a \in \mathsf{R}$ gehört dann ein eindeutig bestimmtes Element $a' \in \mathsf{I}'$, welches in a liegt. Die Zuordnung $a \to a'$ ist ein Isomorphismus von R als k-Modul auf I'. Ein Element $f \in \mathsf{S}$ liegt genau dann in der Restklasse a, wenn seine zweite Komponente $f_{\mathsf{I}'} = a'$ ist. Demnach ergibt sich also nach Lemma 1, daß gilt

$$\operatorname{Max}\left(w_{\mathfrak{p}(x)}(f);\ f \in a\right) = w_{\mathfrak{p}(x)}(a').$$

Also existiert dieses Maximum für jedes Element $a \in \mathsf{R}$, und es ist $< +\infty$ für $a \neq 0$. Demnach wird also durch (1) in der Tat eine wohldefinierte Funktion $w_{\mathfrak{P}^*}(a)$ gegeben.

Es ist nun weiter zu zeigen, daß diese durch (1) gegebene Funktion eine Bewertung von R ist, und zwar eine Fortsetzungsbewertung von $w_{\mathfrak{p}}$. Die Dreiecksungleichung für $w_{\mathfrak{P}^*}$ ergibt sich im Hinblick auf (1) unmittelbar aus der Dreiecksungleichung für $w_{\mathfrak{p}(x)}$. Was die multiplikative Bewertungseigenschaft anbelangt, so folgt aus (1) zunächst nur

$$(2) \qquad w_{\mathfrak{P}^*}(ab) \geqq w_{\mathfrak{P}^*}(a) + w_{\mathfrak{P}^*}(b),$$

unter Berücksichtigung der Tatsache, daß für $w_{\mathfrak{p}(x)}$ die multiplikative Bewertungseigenschaft gilt, und daß I ein *Ideal* aus S ist. Wir müssen also noch zeigen, daß auf Grund unserer Voraussetzungen, nämlich der Irreduzibilitätsvoraussetzung in Abschnitt 5, in (2) sogar das Gleichheitszeichen gilt.

Dazu bemerken wir zunächst die Gültigkeit der Relation

$$(3) \qquad w_{\mathfrak{P}^*}(ca) = w_{\mathfrak{p}}(c) + w_{\mathfrak{P}^*}(a) \qquad \text{für } c \in \mathsf{k},\ a \in \mathsf{R}.$$

In der Tat folgt dies unmittelbar aus (1), denn es ist ja $f \in a$ gleichbedeutend mit $cf \in ca$ (für $c \neq 0$), und eine entsprechende Relation (3) gilt ja für $w_{\mathfrak{p}(x)}$ an Stelle von $w_{\mathfrak{P}^*}$. —

Angewandt auf $a = 1$ ergibt sich aus (3) übrigens, daß $w_{\mathfrak{P}^*}(c) = w_{\mathfrak{p}}(c)$ gilt, denn man sieht leicht, daß nach (1) gilt $w_{\mathfrak{P}^*}(1) = 0$. Demnach ergibt sich also aus (3), daß $w_{\mathfrak{P}^*}$ eine Fortsetzungsbewertung von $w_{\mathfrak{p}}$ ist — sobald nur feststeht, daß $w_{\mathfrak{P}^*}$ überhaupt eine Bewertung von R ist, d. h. daß in (2) das Gleichheitszeichen gilt.

Wir bemerken nun weiter, daß die Wertmenge der Funktion $w_{\mathfrak{P}^*}$ nach (1) gleich der Wertmenge von $w_{\mathfrak{p}(x)}$ ist, also gleich der Wertmenge von $w_{\mathfrak{p}}$. Daher gibt es zu jedem Element $a \neq 0$ aus R ein Element $c \neq 0$ aus k derart, daß $w_{\mathfrak{P}^*}(a) = -w_{\mathfrak{p}}(c)$, nach (3) also $w_{\mathfrak{P}^*}(ca) = 0$ ist. Hieraus und im Hinblick auf (3) folgt: Zum Beweis des Gleichheitszeichens in (2) darf man nach Multiplikation von a und b mit geeigneten Faktoren aus k annehmen, daß $w_{\mathfrak{P}^*}(a) = w_{\mathfrak{P}^*}(b) = 0$ ist. Es ist dann zu zeigen, daß auch $w_{\mathfrak{P}^*}(ab) = 0$ gilt. Diese Behauptung läßt sich nun folgendermaßen interpretieren:

Wir betrachten die Menge $\mathfrak{O}$ der Elemente $a \in \mathsf{R}$ mit $w_{\mathfrak{P}^*}(a) \geqq 0$. Nach (2), und nach der Dreiecksungleichung für $w_{\mathfrak{P}^*}$ ist $\mathfrak{O}$ ein Teilring von R. Nach (3) enthält $\mathfrak{O}$ den Integritätsbereich $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ der $\mathfrak{p}$-ganzen Elemente aus k. Diejenigen Elemente $a \in \mathfrak{O}$, für welche $w_{\mathfrak{P}^*}(a) > 0$ ist, bilden ein *Ideal* $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{O}$. Die obige Behauptung besagt nun einfach, daß $\mathfrak{M}$ ein *Primideal* von $\mathfrak{O}$ ist, d. h.

$\mathfrak{O}/\mathfrak{M}$ *ist ein Integritätsbereich.*

Der Beweis des Gleichheitszeichens in (2) läuft demnach auf den Beweis dieser Aussage zurück. Dazu zeigen wir

$$\mathfrak{O}/\mathfrak{M} = \mathsf{S}\mathfrak{p}/\mathsf{I}\mathfrak{p}. \tag{4}$$

Ist dies gezeigt, so ergibt sich die Nullteilerfreiheit von $\mathfrak{O}/\mathfrak{M}$ aus der Irreduzibilitätsvoraussetzung in Abschnitt 5, derzufolge $\mathsf{I}\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathsf{S}\mathfrak{p}$ ist.

Beweis von (4). Wir bezeichnen mit $\mathfrak{O}'$ den Ring der Elemente $f \in \mathsf{S}$ mit $w_{\mathfrak{p}(x)}(f) \geqq 0$; entsprechend ist $\mathfrak{M}'$ definiert durch $w_{\mathfrak{p}(x)}(f) > 0$. Aus der Definition (1) ergibt sich unmittelbar, daß eine Restklasse $a \in \mathsf{R}$ genau dann zu $\mathfrak{O}$ (bzw. $\mathfrak{M}$) gehört, wenn es in a ein Element $f \in \mathfrak{O}'$ (bzw. $f \in \mathfrak{M}'$) gibt. Bedeutet daher für den Augenblick φ die Restklassenabbildung von S modulo I auf R, so folgt

$$\mathfrak{O} = \varphi(\mathfrak{O}'), \quad \mathfrak{M} = \varphi(\mathfrak{M}').$$

Hieraus ergibt sich, da der Kern von φ auf $\mathfrak{O}'$ gleich $\mathsf{I} \cap \mathfrak{O}'$ ist, die Formel

$$\mathfrak{O}/\mathfrak{M} = \mathfrak{O}'/(\mathfrak{M}' + \mathsf{I} \cap \mathfrak{O}').$$

Jetzt berechnen wir $\mathsf{S}\mathfrak{p}/\mathsf{I}\mathfrak{p}$ auf eine entsprechende Weise. Nach Definition der Funktionalbewertung $w_{\mathfrak{p}(x)}$ gilt $\mathfrak{O}' = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}[x]$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}[x]$. Bedeutet daher ψ den Restklassenhomomorphismus von $\mathfrak{O}'$ modulo $\mathfrak{M}'$, so gilt

$$\psi(\mathfrak{O}') = \mathsf{k}\mathfrak{p}[x] = \mathsf{S}\mathfrak{p}, \quad \psi(\mathsf{I} \cap \mathfrak{O}') = \mathsf{I}\mathfrak{p}.$$

Hieraus ergibt sich, da der Kern von ψ auf $\mathfrak{O}'$ gleich $\mathfrak{M}'$ ist, die Formel

$$\mathsf{S}\mathfrak{p}/\mathsf{I}\mathfrak{p} = \mathfrak{O}'/(\mathsf{I} \cap \mathfrak{O}' + \mathfrak{M}').$$

Zusammengenommen ergibt sich daraus in der Tat die behauptete Relation (4).

Damit hat sich also ergeben, daß durch den natürlichen Ansatz (1) eine Bewertung $w_{\mathfrak{P}^*}$ von R definiert wird, vorausgesetzt, daß es uns gelingt, das Lemma 1 zu beweisen. Bevor wir uns dem Beweis von Lemma 1 zuwenden, machen wir noch die folgende

Bemerkung 1. Beim Beweis, daß $w_{\mathfrak{P}^*}$ die Bewertungseigenschaften besitzt, haben wir nicht benutzt, daß I ein Primideal von S ist, daß also R ein Integritätsbereich ist. Vielmehr haben wir lediglich in Formel (4) benutzt, daß $\mathsf{I}\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathsf{S}\mathfrak{p}$ ist. Daraus folgt also bereits, daß $w_{\mathfrak{P}^*}$ eine Bewertung von R ist. Hieraus schließen wir weiter,

daß R keine Nullteiler besitzt, denn ein mit Nullteilern behafteter Ring kann keine Bewertung besitzen. Es ergibt sich also: Falls $\mathsf{I}\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, so ist auch I ein Primideal. Dies ist das bereits in Abschnitt 5, Lemma 1 angekündigte Resultat. —

Nunmehr wenden wir uns dem Beweis von Lemma 1 zu. Wir bemerken, daß Lemma 1 lediglich auf die Struktur von S als k-Modul Bezug nimmt, und nicht auf seine Struktur als Integritätsbereich. Demgemäß wird sich Lemma 1 auch aus einigen allgemeinen Tatsachen über k-Moduln ergeben. Es ist ja bekannt, daß es in der Bewertungstheorie manchmal notwendig ist, nicht nur bewertete Körper und Integritätsbereiche zu betrachten, sondern auch die sogenannten „normierten" Moduln; vgl. dazu etwa Hasse [5] S. 142—145. Das ist also auch hier der Fall. Wir beginnen daher mit

Allgemeinen Bemerkungen über normierte Moduln. Wie stets in dieser Arbeit, sei ein Körper k und ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ von k vorgegeben. Es sei S ein k-Modul. Wir sprechen von einer „Norm" $\mathfrak{q}$ in S, wenn eine Funktion $w_\mathfrak{q}$ der Elemente $a \in \mathsf{S}$ gegeben ist mit den folgenden Eigenschaften:

$$w_\mathfrak{q}(a) = +\infty \text{ nur für } a = 0,$$
$$w_\mathfrak{q}(a+b) \geqq \operatorname{Min}\left(w_\mathfrak{q}(a),\ w_\mathfrak{q}(b)\right),$$
$$w_\mathfrak{q}(ca) = w_\mathfrak{p}(c) + w_\mathfrak{q}(a)$$

für $a, b \in \mathsf{S}$, $c \in \mathsf{k}$.

Wie aus diesen Axiomen hervorgeht, ist dabei zu fordern, daß die Wertmenge der Funktion $w_\mathfrak{q}$ in einer total geordneten Erweiterungsgruppe der Wertgruppe von $\mathfrak{p}$ liegt[7]). Falls die Wertmenge von $w_\mathfrak{q}$ bereits in der Wertgruppe von $\mathfrak{p}$ enthalten ist, so nennen wir die Norm $\mathfrak{q}$ *unverzweigt* (bezüglich $\mathfrak{p}$).

Ist ein normierter k-Modul S mit Norm $\mathfrak{q}$ vorgegeben, so benutzen wir durchweg die folgenden Bezeichnungen:

$\mathfrak{O}_\mathfrak{q}$ sei der $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-Modul der Elemente $a \in \mathsf{S}$ mit $w_\mathfrak{q}(a) \geqq 0$;

$\mathfrak{M}_\mathfrak{q}$ sei der durch $w_\mathfrak{q}(a) > 0$ gekennzeichnete $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-Teilmodul von $\mathfrak{O}_\mathfrak{q}$;

$\mathsf{S}\mathfrak{q}$ sei der $\mathsf{k}\mathfrak{p}$-Restklassenmodul $\mathfrak{O}_\mathfrak{q}/\mathfrak{M}_\mathfrak{q}$;

$a\mathfrak{q}$ für $a \in \mathfrak{O}_\mathfrak{q}$ sei die Restklasse von a in $\mathsf{S}\mathfrak{q}$;

$\mathsf{I}\mathfrak{q}$ für eine Teilmenge I von S sei die Menge der Elemente $a\mathfrak{q}$ mit $a \in \mathsf{I} \cap \mathfrak{O}_\mathfrak{q}$.

Ist insbesondere I ein k-Teilmodul von S, so ist $\mathsf{I}\mathfrak{q}$ in natürlicher Weise ein $\mathsf{k}\mathfrak{p}$-Teilmodul von $\mathsf{S}\mathfrak{q}$. Er kann und soll mit dem Restklassenmodul von I in Bezug auf die von $\mathfrak{q}$ in I induzierte Norm $\mathfrak{q}_\mathsf{I}$ identifiziert werden.

Definition. *Wir nennen eine Norm* $\mathfrak{q}$ *von* S *träge* (*bezüglich* $\mathfrak{p}$), *wenn für jeden endlichdimensionalen* k-*Teilmodul* S_0 *von* S *gilt* $\dim_\mathsf{k} \mathsf{S}_0 = \dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{S}_0\mathfrak{q}$.

Diese Definition ist eine direkte Verallgemeinerung der Trägheitsdefinition für Primdivisoren in Abschnitt 7. Zunächst gehen wir daran, geeignete Kriterien für die Trägheit einer Norm aufzustellen.

Es sei $\{u_i\}$ eine k-Basis von S; der Index i durchläuft dabei eine gewisse Indexmenge, für die wir keine besondere Bezeichnung einführen. Wir nennen die Basis $\{u_i\}$ *zulässig* bezüglich $\mathfrak{q}$, wenn für jedes Element $a \in \mathsf{S}$ mit der Darstellung

---

[7]) Es würde bereits genügen, statt einer total geordneten Gruppe eine beliebige geordnete Erweiterungsgruppe der Wertgruppe von $\mathfrak{p}$ zuzulassen. Dann ist jedoch zu verlangen, daß das Maximum und das Minimum je zweier Gruppenelemente stets existiert. Alle unsere Überlegungen gelten auch für diesen allgemeineren Fall, der zum Beispiel für die Theorie der Fortsetzungen von Primdivisoren auf endlich-algebraische Erweiterungen von Interesse ist.

$$a = \sum_i c_i u_i, \quad c_i \in \mathsf{k},$$

gilt

$$w_{\mathfrak{q}}(a) = \operatorname*{Min}_i w_{\mathfrak{p}}(c_i).$$

Lemma 2. *$\mathfrak{q}$ ist genau dann träge, wenn jeder endlich-dimensionale k-Teilmodul S_0 von S eine $\mathfrak{q}$-zulässige Basis besitzt.*

Nach der Trägheitsdefinition ergibt sich dies unmittelbar aus der folgenden Behauptung:

Es sei S endlichdimensional. Für jede Norm $\mathfrak{q}$ von S gilt $\dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{S}\mathfrak{q} \leqq \dim_{\mathsf{k}} \mathsf{S}$. Genau dann gilt hier das Gleichheitszeichen, wenn es eine $\mathfrak{q}$-zulässige Basis von S gibt.

Zwecks späterer Anwendung beweisen wir gleich eine etwas allgemeinere Aussage (Lemma 2a), welche diese Aussage als Spezialfall enthält. Sei dazu T ein k-Teilmodul von S, und sei $\{u_i\}$ eine Basis von S modulo T. Wir nennen $\{u_i\}$ $\mathfrak{q}$-zulässig, wenn für jedes Element $a \in \mathsf{S}$ mit der Darstellung

$$a = t + \sum_i c_i u_i, \quad t \in \mathsf{T}, \quad c_i \in \mathsf{k}$$

gilt

$$w_{\mathfrak{q}}(a) = \operatorname*{Min}_i \left(w_{\mathfrak{q}}(t),\ w_{\mathfrak{p}}(c_i)\right).$$

Lemma 2a. *Es sei S/T endlichdimensional. Für jede Norm $\mathfrak{q}$ von S gilt $\dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{S}\mathfrak{q}/\mathsf{T}\mathfrak{q} \leqq \dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{S}/\mathsf{T}$. Genau dann gilt hier das Gleichheitszeichen, wenn es eine $\mathfrak{q}$-zulässige Basis von S modulo T gibt.*

Beweis. Es sei $\{\overline{u}_i\}$ eine $\mathsf{k}\mathfrak{p}$-Basis von $\mathsf{S}\mathfrak{q}$ modulo $\mathsf{T}\mathfrak{q}$ und es seien u_i Elemente aus S derart, daß $u_i\mathfrak{q} = \overline{u}_i$. Zum Beweis der behaupteten Ungleichung haben wir zu zeigen, daß die u_i linear unabhängig sind über k modulo T. Dazu beweisen wir schärfer

$$w_{\mathfrak{q}}(t + \sum_i c_i u_i) = \operatorname*{Min}_i \left(w_{\mathfrak{q}}(t), w_{\mathfrak{p}}(c_i)\right) \tag{5}$$

für beliebige $t \in \mathsf{T}$, $c_i \in \mathsf{k}$. (Hieraus ergibt sich in der Tat die lineare Unabhängigkeit der u_i modulo T; gilt nämlich $t + \sum_i c_i u_i = 0$, so ist die linke Seite in (5) gleich $+\infty$, also ist es auch die rechte Seite, also ist $t = c_i = 0$ für alle i.)

Zum Beweis von (5) darf angenommen werden, daß $w_{\mathfrak{q}}(t) \geqq \operatorname*{Min}_i w_{\mathfrak{p}}(c_i)$ ist, denn sonst gilt (5) nach einer bekannten Verschärfung der Dreiecksungleichung (siehe etwa Hasse [5] S. 85, (3″)). Ferner darf nach Multiplikation mit einem geeigneten Faktor aus k angenommen werden, daß $\operatorname{Min} w_{\mathfrak{p}}(c_i) = 0$ gilt. Zu zeigen ist dann, daß der in (5) auf der linken Seite stehende Wert ebenfalls gleich 0 ist. Das bedeutet

$$t\mathfrak{q} + \sum_i c_i\mathfrak{p} \cdot \overline{u}_i \neq 0,$$

und ist also eine Folge der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der $\overline{u}_i$ modulo $\mathsf{T}\mathfrak{q}$.

Damit hat sich also ergeben, daß in jedem Falle die Ungleichung in Lemma 2a richtig ist. Es werde nun angenommen, daß in Lemma 2a sogar das Gleichheitszeichen gilt. Dann folgt aus unserer Konstruktion, daß die u_i sogar eine k-Basis von S modulo T bilden. Die Formel (5) zeigt nun weiter, daß diese k-Basis modulo T sogar $\mathfrak{q}$-zulässig ist.

Nun werde umgekehrt angenommen, daß es eine $\mathfrak{q}$-zulässige Basis $\{u_i\}$ von S modulo T gibt. Aus der $\mathfrak{q}$-Zulässigkeit ergibt sich unmittelbar, daß die $u_i\mathfrak{q}$ linear unabhängig über $\mathsf{k}\mathfrak{p}$ modulo $\mathsf{T}\mathfrak{q}$ sind. Es gilt also $\dim_{\mathsf{k}} \mathsf{S}/\mathsf{T} \leqq \dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{S}\mathfrak{q}/\mathsf{T}\mathfrak{q}$. Da nach Obigem in jedem Falle die umgekehrte Ungleichung gilt, so ergibt sich in der Tat hieraus das Gleichheitszeichen. Damit ist Lemma 2a und also auch Lemma 2 bewiesen.

Wir notieren einige Folgerungen aus den erhaltenen Resultaten:

Folgerung 1. *Eine träge Norm ist stets unverzweigt.*

Beweis. Sei $a \neq 0$ aus S. Sei S_0 der von a erzeugte eindimensionale k-Teilmodul von S. Wegen der Trägheit von $\mathfrak{q}$ gibt es nach Lemma 2 eine, nur aus einem Element u bestehende, $\mathfrak{q}$-zulässige Basis von S_0. Ist $a = cu$ mit $c \in \mathsf{k}$, so gilt also $w_{\mathfrak{q}}(a) = w_{\mathfrak{p}}(c)$.

Folgerung 2. *Es sei* S *endlichdimensional, und es gelte* $\dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{S}\mathfrak{q} = \dim_{\mathsf{k}} \mathsf{S}$. *Dann gibt es zu jedem* k*-Teilmodul* I *von* S *einen komplementären* k*-Teilmodul* I' *derart, daß die direkte Zerlegung* $\mathsf{S} = \mathsf{I} + \mathsf{I}'$ *zulässig ist bezüglich* $\mathfrak{q}$ *im Sinne der folgenden Definition.*

Definition. *Eine direkte Zerlegung* $\mathsf{S} = \sum_\nu \mathsf{S}_\nu$ *heißt zulässig bezüglich* $\mathfrak{q}$, *wenn für jedes Element* $a \in \mathsf{S}$ *mit der Darstellung* $a = \sum_\nu a_\nu (a_\nu \in \mathsf{S}_\nu)$ *gilt* $w_{\mathfrak{q}}(a) = \operatorname{Min}_\nu w_{\mathfrak{q}}(a_\nu)$.

Beweis. Nach Lemma 2a, angewandt auf S/I, gilt zunächst $\dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{S}\mathfrak{q}/\mathsf{I}\mathfrak{q} \leqq \dim_{\mathsf{k}} \mathsf{S}/\mathsf{I}$. Nach demselben Lemma, angewandt auf $\mathsf{I}/0 = \mathsf{I}$, gilt $\dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{I}\mathfrak{q} \leqq \dim_{\mathsf{k}} \mathsf{I}$. Gilt daher die Gleichheit $\dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{S}\mathfrak{q} = \dim_{\mathsf{k}} \mathsf{S}$, so ergibt sich die Gültigkeit der beiden Relationen

$$\dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{I}\mathfrak{q} = \dim_{\mathsf{k}} \mathsf{I}, \qquad \dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{S}\mathfrak{q}/\mathsf{I}\mathfrak{q} = \dim_{\mathsf{k}} \mathsf{S}/\mathsf{I}.$$

Aus der letzten Relation folgern wir nun, wiederum nach Lemma 2a, daß es eine $\mathfrak{q}$-zulässige Basis $\{u_i\}$ von S mod I gibt. Der von den u_i aufgespannte k-Teilmodul I' erfüllt offenbar die Forderungen der Folgerung 2.

Wir notieren noch die folgende Tatsache, die sich eben bei dem Beweise ergeben hat:

Folgerung 3. *Es sei* S *endlichdimensional, und* I *ein* k*-Teilmodul von* S. *Gilt dann* $\dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{S}\mathfrak{q} = \dim_{\mathsf{k}} \mathsf{S}$, *so gilt auch* $\dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{I}\mathfrak{q} = \dim_{\mathsf{k}} \mathsf{I}$.

Aus dieser Folgerung folgt insbesondere, daß unser allgemeiner Trägheitsbegriff im Spezialfall einer endlich-algebraischen Zahlkörpererweiterung mit dem üblichen, aus der Zahlentheorie bekannten Trägheitsbegriff übereinstimmt. Vgl. die diesbezüglichen Ausführungen in Abschnitt 8. —

Besitzt S eine $\mathfrak{q}$-zulässige direkte Zerlegung $\mathsf{S} = \sum_\nu \mathsf{S}_\nu$, so nennen wir die von $\mathfrak{q}$ in S_ν induzierte Norm die ν-te *Komponente* von $\mathfrak{q}$ und bezeichnen sie mit $\mathfrak{q}_\nu$. Offenbar ist $\mathfrak{q}$ durch seine Komponenten $\mathfrak{q}_\nu$ bereits eindeutig bestimmt.

Folgerung 4. *Besitzt* $\mathsf{S} = \sum_\nu \mathsf{S}_\nu$ *eine* $\mathfrak{q}$*-zulässige direkte Zerlegung, so ist* $\mathfrak{q}$ *genau dann träge, wenn alle Komponenten* $\mathfrak{q}_\nu$ *träge sind.*

Beweis. Es braucht nur bewiesen zu werden, daß aus der Trägheit aller Komponenten $\mathfrak{q}_\nu$ die Trägheit von $\mathfrak{q}$ folgt. Wir betrachten die in S enthaltenen Teilmoduln der Form

$$\mathsf{I} = \sum_\nu \mathsf{I}_\nu \qquad \text{mit } \mathsf{I}_\nu < \mathsf{S}_\nu,$$

wobei die I_ν endlichdimensional sein sollen, und nur endlich viele nicht verschwinden. Insbesondere ist also I selbst endlichdimensional. Jeder endlichdimensionale k-Teilmodul von S ist in einem Modul I dieser Form enthalten. Nach der Folgerung 3 genügt es daher zu zeigen, daß $\dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{I}\mathfrak{q} = \dim_{\mathsf{k}} \mathsf{I}$ für jeden solchen Modul I gilt. Nun gilt

$$\dim_{\mathsf{k}} \mathsf{I} = \sum_\nu \dim_{\mathsf{k}} \mathsf{I}_\nu, \quad \dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{I}\mathfrak{q} = \sum_\nu \dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{I}_\nu\mathfrak{q},$$

letzteres wegen der vorausgesetzten $\mathfrak{q}$-Zulässigkeit der Zerlegung von S, und also auch von I, in seine ν-ten Komponenten. Andererseits gilt aber wegen der Trägheit von $\mathfrak{q}_\nu$

$$\dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{I}_\nu\mathfrak{q} = \dim_{\mathsf{k}} \mathsf{I} \quad \text{für alle } \nu.$$

Zusammengenommen ergibt sich die Behauptung

Folgerung 5. *Besitzt* S *eine* $\mathfrak{q}$*-zulässige Basis, so ist* $\mathfrak{q}$ *träge.*

Beweis. Die Existenz einer $\mathfrak{q}$-zulässigen Basis ist offenbar gleichbedeutend mit der Existenz einer direkten $\mathfrak{q}$-zulässigen Zerlegung von S in eindimensionale, zu k als normiertem k-Modul isomorphe und daher träge Teilmoduln. Daher ergibt sich Folgerung 5 unmittelbar aus Folgerung 4. — Man bemerke, daß man für unendlichdimensionale Moduln nicht umgekehrt aus der Trägheit die Existenz einer $\mathfrak{q}$-zulässigen Basis schließen kann; nur im endlichdimensionalen Falle ist dies nach Lemma 2 möglich.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen geben wir jetzt den

Beweis von Lemma 1. Wir fassen den Polynomring $\mathsf{S} = \mathsf{k}[x]$ als k-Modul auf. Die Funktionalbewertung $w_{\mathfrak{p}(x)}$ definiert insbesondere eine Norm von S als k-Modul, die wir mit $\mathfrak{p}(x)$ bezeichnen. Nach Definition von $\mathfrak{p}(x)$ bilden die Potenzprodukte in x eine $\mathfrak{p}(x)$-zulässige Basis von S. Daher gilt nach Folgerung 5:

$$\mathfrak{p}(x) \textit{ ist als Norm von } \mathsf{S} = \mathsf{k}[x] \textit{ träge.}$$

Weiter betrachten wir die direkte Zerlegung $\mathsf{S} = \sum_\nu \mathsf{S}_\nu$ in homogene Teilmoduln. Diejenigen Potenzprodukte in x, welche den Grad ν besitzen, bilden eine Basis von S_ν. Nehmen wir diese Basen von S_ν für alle ν zusammen, so erhalten wir gerade die oben betrachtete $\mathfrak{p}(x)$-zulässige Basis von S, welche aus *allen* Potenzprodukten in x besteht. Daraus ergibt sich:

$$\textit{Die direkte Zerlegung } \mathsf{S} = \sum_\nu \mathsf{S}_\nu \textit{ ist } \mathfrak{p}(x)\textit{-zulässig.}$$

Für jedes Element $f \in \mathsf{S}$ mit der Zerlegung $f = \sum_\nu f_\nu$ in homogene Komponenten gilt also $w_{\mathfrak{p}(x)}(f) = \operatorname{Min}_\nu w_{\mathfrak{p}(x)}(f_\nu)$. Hieraus ergibt sich: Um für I die Existenz eines komplementären $\mathfrak{p}(x)$-zulässigen Moduls I' in S nachzuweisen, genügt es, für jedes I_ν die Existenz eines komplementären, $\mathfrak{p}(x)$-zulässigen Moduls I'_ν in S_ν nachzuweisen. Man beachte dabei, daß I voraussetzungsgemäß graduiert ist, und sich also als direkte Summe seiner homogenen Komponenten $\mathsf{I}_\nu = \mathsf{I} \cap \mathsf{S}_\nu$ schreiben läßt.

Die Existenz von I'_ν ergibt sich nun unmittelbar aus der Folgerung 2. Die Voraussetzungen dieser Folgerung sind für S_ν erfüllt, denn erstens ist S_ν endlichdimensional (seine Dimension ist gleich der Anzahl der Potenzprodukte in x vom Grade ν), und zweitens ist $\mathfrak{p}(x)$ träge, so daß also die Dimensionsrelation, die in Folgerung 2 vorausgesetzt wurde, für S_ν gilt.

Damit ist Lemma 1 bewiesen. Wie oben gezeigt, wird also vermöge (1) eine Bewertung von R definiert. Diese setzt sich eindeutig zu einer Bewertung von K^* fort, definiert also einen gewissen Primdivisor $\mathfrak{P}^*$ von K^*. Dieser ist eine Fortsetzung von $\mathfrak{p}$, wie bereits oben in (3) erwähnt. Es handelt sich jetzt im weiteren darum, zu zeigen, daß $\mathfrak{P}^*$ und der von $\mathfrak{P}^*$ in K induzierte Primdivisor $\mathfrak{P}$ die Eigenschaften des Trägheitssatzes und seiner Ergänzungssätze besitzt.

9B. Beweis des Trägheitssatzes; 2. Teil. Gemäß der Definition in Abschnitt 9A, (1) fassen wir $\mathfrak{P}^*$ zunächst nur als Norm von R auf, und zeigen

(1) $\mathfrak{P}^*$ *ist als Norm von* R *träge.*

Beweis. Sei I' ein komplementärer Modul zu I in S gemäß Abschnitt 9A, Lemma 1. Wir betrachten den natürlichen Isomorphismus $a \to a'$ von R auf I' (es handelt sich um

einen Isomorphismus als k-Modul). Wie bereits in 9A, anschließend an Lemma 1 gezeigt, gilt dabei

$$w_{\mathfrak{P}^*}(a) = w_{\mathfrak{p}(x)}(a').$$

Durch den Isomorphismus $a \to a'$ wird also die Norm $\mathfrak{P}^*$ übergeführt in die von $\mathfrak{p}(x)$ in l' induzierte Norm. Es genügt daher zu zeigen, daß $\mathfrak{p}(x)$ in l' eine träge Norm induziert. Nun ist ja $\mathfrak{p}(x)$ als Norm von S träge, wie bereits in 9A, beim Beweis von Lemma 1, gezeigt. Daher induziert $\mathfrak{p}(x)$ in jedem k-Teilmodul von S, insbesondere also in l', eine träge Norm. Das war zu zeigen.

Aus (1) folgern wir jetzt:

(2) *$\mathfrak{P}^*$ ist auch als Primdivisor von K^* träge.*

Beweis. Es sei $a \neq 0$ aus R. Wir betrachten den k-Modul $a^{-1}\mathsf{R}$. Dieser ändert sich nicht, wenn wir a mit einem Faktor $\neq 0$ aus k multiplizieren. Bei geeigneter Wahl dieses Faktors kann erreicht werden, daß $w_{\mathfrak{P}^*}(a) = 0$ ist, denn nach (1) ist $\mathfrak{P}^*$ als Norm von R unverzweigt über k (siehe 9A, Folgerung 1). Wir nehmen also an, es sei $w_{\mathfrak{P}^*}(a) = 0$. Für jedes Element $u \in \mathsf{R}$ gilt dann

$$w_{\mathfrak{P}^*}(a^{-1}u) = w_{\mathfrak{P}^*}(u).$$

Die isomorphe Abbildung (als k-Modul) $u \to a^{-1}u$ führt also $\mathfrak{P}^*$ (als Norm von R) über in $\mathfrak{P}^*$ (als Norm von $a^{-1}\mathsf{R}$). Aus (1) ergibt sich nunmehr, daß der k-Modul $a^{-1}\mathsf{R}$, normiert vermöge $\mathfrak{P}^*$, träge ist.

Nunmehr benutzen wir die Tatsache, daß K^* gleich dem Quotientenkörper von R ist. Daher ist jeder endlichdimensionale k-Teilmodul M von K^* enthalten in $a^{-1}\mathsf{R}$ bei geeigneter Wahl von a. Nach dem eben gezeigten gilt daher $\dim_{\mathsf{k}} \mathsf{M} = \dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{M}\mathfrak{P}^*$. Wegen der Willkür in der Wahl von M ergibt sich daraus (2).

Aus (2) ergibt sich, daß $\mathfrak{P}^*$ in jedem Teilkörper von K^* (welcher k enthält) einen trägen Primdivisor induziert. Da wir den von $\mathfrak{P}^*$ in K induzierten Primdivisor mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet haben, so folgt:

(3) *$\mathfrak{P}$ ist als Primdivisor von K träge.*

Damit ist gezeigt, daß die Trägheitsaussagen des Trägheitssatzes und seiner Ergänzungssätze für $\mathfrak{P}^*$ und $\mathfrak{P}$ richtig sind. Jetzt beweisen wir auch die anderen Eigenschaften von $\mathfrak{P}^*$ und $\mathfrak{P}$. Wir beginnen mit dem 2. Ergänzungssatz und zeigen

(4) $$\mathsf{R}\mathfrak{P}^* = \mathsf{R}\mathfrak{p}.$$

Beweis. Definitionsgemäß ist $\mathsf{R}\mathfrak{P}^* = \mathfrak{O}/\mathfrak{M}$, mit den in Abschnitt 9A, (4) eingeführten Bezeichnungen. Andererseits ist $\mathsf{R}\mathfrak{p}$ nach Definition gleich $\mathsf{S}\mathfrak{p}/\mathsf{l}\mathfrak{p}$. Daher ist (4) identisch mit der bereits oben bewiesenen Formel 9A, (4).

Jetzt zeigen wir weiter

(5) $$\mathsf{R}_\nu\mathfrak{P}^* = \mathsf{R}_\nu\mathfrak{p} \quad \textit{für alle } \nu.$$

Beweis. Ist $a \in \mathsf{R}_\nu$, so kann man sich bei der Berechnung von $w_{\mathfrak{P}^*}(a)$ gemäß 9A, (1) auf diejenigen f beschränken, welche in S_ν liegen. Das ergibt sich unmittelbar aus der bereits in 9A festgestellten $\mathfrak{p}(x)$-Zulässigkeit der direkten Zerlegung $\mathsf{S} = \sum_\nu \mathsf{S}_\nu$. Demnach entsteht also R_ν als normierter k-Modul genau so aus S_ν, wie R aus S entsteht. Wir können also auf R_ν genau dieselben Schlüsse anwenden, wie wir sie oben beim Beweis von (4) (bzw. 9A, (4)) verwendet haben; diese Schlüsse ergeben dann den Beweis von (5).

Damit ist der 2. Ergänzungssatz bewiesen. Jetzt gehen wir zum 1. Ergänzungssatz über. Wie dort bezeichnen wir mit y das System der Restklassen von x modulo l. Ent-

sprechend sei $y\mathfrak{p}$ das System der Restklassen von x modulo $\mathsf{l}\mathfrak{p}$. Offenbar ist $y\mathfrak{p}$ das System der homogenen Koordinaten eines allgemeinen Punktes von $V\mathfrak{p}$ über $\mathsf{k}\mathfrak{p}$. Wir zeigen

$$y\mathfrak{P}^* = y\mathfrak{p}. \tag{6}$$

Beweis. Wir knüpfen an den Beweis der Formel 9A, (4) an, und übernehmen auch die dortigen Bezeichnungen. Dort hatte sich ergeben, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{O}' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathfrak{O} \arrow[d, "\bmod \mathfrak{M}"] \\ \mathsf{S}\mathfrak{p} \arrow[r, "\bmod \mathsf{l}\mathfrak{p}"'] & \mathsf{R}\mathfrak{p} = \mathsf{R}\mathfrak{P}^* \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Bilden wir nun das Elementsystem x aus $\mathfrak{O}'$ das einemal auf dem oberen Wege dieses Diagramms ab, so entsteht $y\mathfrak{P}^*$. Bilden wir es andererseits auf dem unteren Wege ab, so entsteht $y\mathfrak{p}$. Demnach ist also (6) eine unmittelbare Folge aus der Kommutativität dieses Diagramms.

Aus (6) ergibt sich durch Quotientenbildung die folgende Aussage, welche einen Teil des Trägheitssatzes darstellt:

$$y_0\mathfrak{P}^* : y_1\mathfrak{P}^* : \cdots : y_n\mathfrak{P}^* = y_0\mathfrak{p} : y_1\mathfrak{p} : \cdots : y_n\mathfrak{p}. \tag{7}$$

Jetzt bleiben nur noch die beiden *Eindeutigkeitsaussagen* für $\mathfrak{P}^*$ und für $\mathfrak{P}$ zu beweisen. Zunächst zeigen wir:

(8) *$\mathfrak{P}^*$ ist als Fortsetzungsprimdivisor von $\mathfrak{p}$ durch die Eigenschaft* (6) *eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $\mathfrak{P}'$ irgendeine Fortsetzung von $\mathfrak{p}$, für welche (6) gilt. Dann induziert $\mathfrak{P}'$ im Ring $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}[y]$ denselben Homomorphismus wie $\mathfrak{P}^*$. Insbesondere ist also für ein Element $b \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}[y]$ die Aussage $b\mathfrak{P}' \neq 0$ gleichbedeutend mit der Aussage $b\mathfrak{P}^* \neq 0$. Das bedeutet: Für ein Element $b \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}[y]$ ist genau dann $w_{\mathfrak{P}'}(b) = 0$, wenn $w_{\mathfrak{P}^*}(b) = 0$. Wir haben hieraus zu schließen, daß $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}^*$. Dazu genügt es zu zeigen, daß für jedes Element $a \in \mathsf{R}$ gilt $w_{\mathfrak{P}'}(a) = w_{\mathfrak{P}^*}(a)$.

Wir bemerken dazu, daß $\mathfrak{P}^*$ über $\mathfrak{p}$ *unverzweigt* ist; das wurde bereits beim Beweis von (2) gezeigt. Zu jedem $a \neq 0$ aus R gibt es demnach ein $c \neq 0$ aus k derart, daß für $b = ca$ gilt $w_{\mathfrak{P}^*}(b) = 0$. Können wir zeigen, daß dieses Element b nicht nur in R, sondern sogar in $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}[y]$ liegt, so ergibt sich nach dem oben Gesagten $w_{\mathfrak{P}'}(b) = 0$, also $w_{\mathfrak{P}'}(a) = -w_\mathfrak{p}(c) = w_{\mathfrak{P}^*}(a)$.

Wir haben demnach noch folgendes zu zeigen: Ist $b \in \mathsf{R}$, so folgt aus $w_{\mathfrak{P}^*}(b) \geqq 0$ die Relation $b \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}[y]$. Mit der beim Beweis von 9A, (4) eingeführten Bezeichnung bedeutet das

$$\mathfrak{O} = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}[y]. \tag{8a}$$

Nun gilt einerseits, wie bereits beim Beweis von 9A, (4) gezeigt, die Relation $\mathfrak{O} = \varphi(\mathfrak{O}')$, wobei φ den Restklassenhomomorphismus von S modulo l auf R bedeutet. Andererseits ist, wie ebenfalls dort gezeigt $\mathfrak{O}' = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}[x]$. Zusammengenommen ergibt das wegen $\varphi(x) = y$ die Behauptung. Damit ist (8) bewiesen.

(9) *$\mathfrak{P}$ ist als Fortsetzungsprimdivisor von $\mathfrak{p}$ eindeutig bestimmt durch die Eigenschaft* (7).

Beweis. Es sei $\mathfrak{P}$ irgendeine Fortsetzung von $\mathfrak{p}$ auf K mit der Eigenschaft (7). Im Hinblick auf (8) genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{P}$ eine Fortsetzung $\mathfrak{P}^*$ auf K^* besitzt mit der

Eigenschaft (6). Wir betrachten dazu die Werte $w'_{\mathfrak{P}}(y_i/y_j)$, soweit $y_j \neq 0$. Diese Werte besitzen in der Wertgruppe von $\mathfrak{P}$ ein gewisses Minimum $< +\infty$. Dieses Minimum werde etwa von dem Quotienten y_0/y_1 angenommen, wobei also insbesondere $y_0, y_1 \neq 0$ ist. Für jedes $i = 0, 1, \ldots, n$ folgt dann

$$w_{\mathfrak{P}}(y_i/y_0) = w_{\mathfrak{P}}(y_i/y_1) - w_{\mathfrak{P}}(y_0/y_1) \geqq 0.$$

Also ist y/y_0 im Bewertungsring $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ von $\mathfrak{P}$ enthalten.

Wir betrachten nun den Integratitätsbereich $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}[y_0]$. Dieser enthält nach dem eben Gezeigten das Elementsystem y. Andererseits ist $y_0 \neq 0$, also ist y_0 nach allgemeinen Sätzen aus der projektiven Geometrie *transzendent* über K. Demnach kann der Restklassenhomomorphismus von $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ bezüglich $\mathfrak{P}$ dadurch auf $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}[y_0]$ fortgesetzt werden, daß man für das Bild von y_0 ein beliebiges Element (aus einem Erweiterungskörper von $\mathsf{K}\mathfrak{P}$) vorschreibt. Wir schreiben dafür $y_0\mathfrak{p}$ vor, und setzen den so entstehenden Homomorphismus von $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}[y_0]$ zu einem Ort $\mathfrak{P}^*$ von K^* fort. Es gilt dann

$$y\mathfrak{P}^* = (y/y_0)\,\mathfrak{P} \cdot y_0\mathfrak{P}^* = (y\mathfrak{p}/y_0\mathfrak{p}) \cdot y_0\mathfrak{p} = y\mathfrak{p}.$$

Also besitzt $\mathfrak{P}^*$ die Eigenschaft (7). Das war zu zeigen.

Mit dem Beweis der Aussagen (1) bis (9) ist der Trägheitssatz und seine beiden Ergänzungssätze bewiesen. Damit ist also auch der Beweis von Satz I beendet.

10. Weitere Ergänzungen zum Trägheitssatz. Der Trägheitssatz wird auch beim Beweis der Sätze II und III eine bedeutende Rolle spielen. Dort werden wir jedoch außer den beiden in Abschnitt 7 formulierten Ergänzungssätzen noch weitere Ergänzungen zum Trägheitssatz benutzen. Wir werden diese Ergänzungen in diesem Abschnitt formulieren und beweisen. Es handelt sich darum, nachzuweisen, daß alle innerhalb K^* ausführbaren Bildungen bezüglich V, soweit sie globaler Natur sind, bei Restbildung modulo $\mathfrak{P}^*$ in die entsprechenden Bildungen bezüglich $V\mathfrak{p}$ übergehen. Daher besitzen diese Zusätze wohl auch einige selbständige Bedeutung.

3. Ergänzung. *Das Bild* $\mathsf{K}^*\mathfrak{P}^*$ *des Quotientenkörpers* K^* *von* R *ist gleich dem Quotientenkörper* $\mathsf{K}^*\mathfrak{p}$ *von* $\mathsf{R}\mathfrak{p}$.

Beweis. Im Hinblick auf Abschnitt 9B, (4) läuft die Behauptung auf den Beweis der folgenden Aussage zurück: Jedes Element $z \in \mathsf{K}^*$, welches $\mathfrak{P}^*$-ganz ist, besitzt eine Darstellung der Form $z = a/b$, mit $a, b \in \mathsf{R}$, $w_{\mathfrak{P}^*}(a) \geqq 0$, $w_{\mathfrak{P}^*}(b) = 0$. Nun besitzt z sicher eine Quotientendarstellung $z = a/b$ mit $a, b \in \mathsf{R}$, denn K^* ist der Quotientenkörper von R. Wegen der Unverzweigtheit von $\mathfrak{P}^*$ kann hierbei b durch Multiplikation mit einem Faktor aus k so normiert werden, daß $w_{\mathfrak{P}^*}(b) = 0$. Dann ist in der Tat auch $w_{\mathfrak{P}^*}(a) = w_{\mathfrak{P}^*}(z) \geqq 0$. Das war zu zeigen.

4. Ergänzung. *Das Bild* $\mathsf{K}^*_\nu\mathfrak{P}^*$ *des Moduls* K^*_ν *der homogenen Elemente* ν*-ten Grades aus* K^* *ist gleich dem Modul* $\mathsf{K}^*_\nu\mathfrak{p}$ *der homogenen Elemente* ν*-ten Grades aus* $\mathsf{K}^*\mathfrak{p}$.

Für $\nu = 0$ erhalten wir hieraus als

Folgerung. *Das Bild* $\mathsf{K}\mathfrak{P}$ *des Funktionenkörpers* K *von* V *ist gleich dem Funktionenkörper* $\mathsf{K}\mathfrak{p}$ *von* $V\mathfrak{p}$.

Beweis. Sei $z \in \mathsf{K}^*_\nu$. Es gibt eine Darstellung $z = a/b$ mit homogenen Elementen $a, b \in \mathsf{R}$, wobei $\nu = \mathrm{Grad}\,(a) - \mathrm{Grad}\,(b)$. Durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor aus k kann dabei b so normiert werden, daß $w_{\mathfrak{P}^*}(b) = 0$ ist; dadurch geht die Homogenität von b nicht verloren. Ist daher $w_{\mathfrak{P}^*}(z) \geqq 0$, so folgt $w_{\mathfrak{P}^*}(a) \geqq 0$, und $z\mathfrak{P}^* = a\mathfrak{P}^*/b\mathfrak{P}^*$. Hierbei sind $a\mathfrak{P}^*$ und $b\mathfrak{P}^*$ nach 9B, (5) homogene Elemente aus $\mathsf{R}\mathfrak{p}$ vom selben Grade wie a bzw. b. Also ist $z\mathfrak{P}^*$ homogen vom selben Grade ν wie z. Es ergibt sich daraus $\mathsf{K}^*_\nu\mathfrak{P}^* < \mathsf{K}^*_\nu\mathfrak{p}$. Die Umkehrung dieser Schlußweise ergibt $\mathsf{K}^*_\nu\mathfrak{p} < \mathsf{K}^*_\nu\mathfrak{P}^*$. Das war zu zeigen.

5. Ergänzung. *Sei* M *ein graduierter* k*-Modul aus* K^*. *Dann ist das Bild* $\mathsf{M}\mathfrak{P}^*$ *ein graduierter* $\mathsf{k}\mathfrak{p}$*-Modul aus* $\mathsf{K}^*\mathfrak{p}$. *Und zwar ist das Bild* $\mathsf{M}_\nu\mathfrak{P}^*$ *der* ν*-ten homogenen Komponente von* M *gleich der* ν*-ten homogenen Komponente von* $\mathsf{M}\mathfrak{P}^*$.

Beweis. Nach der 4. Ergänzung besteht der $\mathsf{k}\mathfrak{p}$-Modul $\mathsf{M}_\nu\mathfrak{P}^*$ aus homogenen Elementen ν-ten Grades von K^*. Es genügt daher zu zeigen, daß sich $\mathsf{M}\mathfrak{P}^*$ in die direkte Summe der $\mathsf{M}_\nu\mathfrak{P}^*$ zerlegt. Das wiederum folgt aus der Tatsache, daß die direkte Zerlegung $\mathsf{M} = \sum_\nu \mathsf{M}_\nu$ zulässig ist bezüglich $\mathfrak{P}^*$ im Sinne der allgemeinen Definition in 9A. Das läuft auf den Beweis der Formel

$$(1) \qquad w_{\mathfrak{P}^*}(\sum_\nu a_\nu) = \operatorname{Min}_\nu w_{\mathfrak{P}^*}(a_\nu) \qquad \text{für } a_\nu \in \mathsf{K}_\nu^*$$

hinaus. (Dabei wird natürlich vorausgesetzt, daß nur endlich viele der in (1) auftretenden Elemente a_ν von 0 verschieden sind.)

Nach Multiplikation mit einem geeigneten homogenen Element $\neq 0$ aus K^* dürfen wir annehmen, daß alle Elemente a_ν aus (1) in R enthalten sind. Daher genügt es also zu zeigen, daß die direkte Zerlegung $\mathsf{R} = \sum_\nu \mathsf{R}_\nu$ zulässig ist bezüglich $\mathfrak{P}^*$.

Wir schließen dazu an Lemma 1, Abschnitt 9A und seinen Beweis an. Hat I' die dortige Bedeutung, so ist also R als k-Modul isomorph zu I' in natürlicher Weise; wie anschließend an Lemma 1, Abschnitt 9A gezeigt, wird dabei $w_{\mathfrak{P}^*}$ übergeführt in $w_{\mathfrak{p}(x)}$. Nach dem Beweis von Lemma 1 ist $\mathsf{I}' = \sum_\nu \mathsf{I}'_\nu$ graduiert, und daraus ergibt sich, daß I'_ν das Bild von R_ν bei dem natürlichen Isomorphismus von R auf I' ist. Unsere Behauptung läuft demnach auf den Nachweis zurück, daß die direkte Zerlegung $\mathsf{I}' = \sum_\nu \mathsf{I}'_\nu$ zulässig ist bezüglich $\mathfrak{p}(x)$. Das ist aber klar, denn es ist ja $\mathsf{I}'_\nu = \mathsf{I}' \cap \mathsf{S}_\nu$, und die direkte Zerlegung $\mathsf{S} = \sum_\nu \mathsf{S}_\nu$ ist zulässig bezüglich $\mathfrak{p}(x)$, wie bereits beim Beweis von Lemma 1 gezeigt. Das war zu zeigen.

6. Ergänzung. *Sei* $\mathfrak{A}$ *ein* R*-Modul aus* K^*. *Dann ist* $\mathfrak{A}\mathfrak{P}^*$ *ein* $\mathsf{R}\mathfrak{p}$*-Modul aus* $\mathsf{K}^*\mathfrak{p}$. *Ist dabei* $\mathfrak{A}$ *als* R*-Modul endlich, so ist* $\mathfrak{A}\mathfrak{P}^*$ *endlich als* $\mathsf{R}\mathfrak{p}$*-Modul.*

Beweis. Jedenfalls ist $\mathfrak{A}\mathfrak{P}^*$ ein $\mathsf{k}\mathfrak{p}$-Modul. Ist nun $\bar{a} \in \mathfrak{A}\mathfrak{P}^*$, $\bar{u} \in \mathsf{R}\mathfrak{p}$, so wähle man $a \in \mathfrak{A}$, $u \in \mathsf{R}$ derart, daß $a\mathfrak{P}^* = \bar{a}$ und $u\mathfrak{P}^* = \bar{u}$. Da $\mathfrak{A}$ ein R-Modul ist, so ist $ua \in \mathfrak{A}$. Also ist $\bar{u}\bar{a} = ua \cdot \mathfrak{P}^* \in \mathfrak{A}\mathfrak{P}^*$. Also ist $\mathfrak{A}\mathfrak{P}^*$ abgeschlossen bei Multiplikation mit $\mathsf{R}\mathfrak{p}$, ist also ein $\mathsf{R}\mathfrak{p}$-Modul.

Ist nun $\mathfrak{A}$ endlich, so gibt es ein Element $b \neq 0$ aus R derart, daß $b\mathfrak{A} < \mathsf{R}$. Durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor aus k kann dabei b so normiert werden, daß $w_{\mathfrak{P}^*}(b) = 0$ ist. Es gilt dann einerseits $b\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{P}^* < \mathsf{R}\mathfrak{p}$, und andererseits $b\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{P}^* = b\mathfrak{P}^* \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{P}^*$. Aus der letzteren Relation folgt, daß $\mathfrak{A}\mathfrak{P}^*$ zugleich mit $b\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{P}^*$ endlich ist; aus der ersteren Relation folgt, daß $b\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{P}^*$ als $\mathsf{R}\mathfrak{p}$-Modul aus $\mathsf{R}\mathfrak{p}$ endlich ist. (Man beachte, daß $\mathsf{R}\mathfrak{p} = \mathsf{k}\mathfrak{p}[y\mathfrak{p}]$ der Noetherschen Maximalbedindung für Ideale genügt.) Das war zu zeigen.

Ein endlicher R-Modul aus K^* soll im folgenden ein R-*Ideal* heißen. Aus der 5. und 6. Ergänzung zusammen ergibt sich die für uns wichtige

1. Folgerung. *Das Bild* $\mathfrak{A}\mathfrak{P}^*$ *eines graduierten* R*-Ideals ist ein graduiertes* $\mathsf{R}\mathfrak{p}$*-Ideal; und zwar ist das Bild der* ν*-ten homogenen Komponente von* $\mathfrak{A}$ *gleich der* ν*-ten homogenen Komponente des Bildes* $\mathfrak{A}\mathfrak{P}^*$.

Nennen wir nun zwei graduierte R-Ideale $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *wesentlich gleich*, wenn für hinreichend große ν die ν-ten homogenen Komponenten übereinstimmen, so ergibt sich aus der 1. Folgerung unmittelbar die

2. Folgerung. *Wesentlich gleiche* R*-Ideale gehen vermöge* $\mathfrak{P}^*$ *in wesentlich gleiche* $\mathsf{R}\mathfrak{p}$*-Ideale über.*

Nachdem wir nun alle notwendigen Ergänzungen zum Trägheitssatz bewiesen haben, machen wir für das folgende die Verabredung, die Identitifikation 8, (2) *wirklich durchzuführen.* Damit wird also die Bewertung $w_\mathfrak{p}$ auch für Elemente aus K und aus K^* erklärt. Diese Identifikation ist im Hinblick auf die Trägheitssätze sinnvoll.

§ 3. Reduktion von Divisoren. Invarianz der virtuellen Dimension.

11. Allgemeines über Vielfachenideale von Divisoren. Bevor wir mit dem eigentlichen Beweis der Sätze II und III beginnen, stellen wir einige Eigenschaften der Vielfachenideale von Divisoren zusammen. Es handelt sich dabei größtenteils um wohlbekannte Tatsachen aus der algebraischen Geometrie. Wir stellen diese Tatsachen lediglich in einer unseren Bedürfnissen angepaßten Form dar.

Wir übernehmen die Bezeichnungen der vorangegangenen Abschnitte. Insbesondere sei also V eine irreduzible projektive Mannigfaltigkeit über k mit dem zugehörigen graduierten Koordinatenring $\mathsf{R} = \mathsf{k}[y]$ eines allgemeinen Punktes, und dem Funktionenkörper K, sowie dem Quotientenkörper K^* von R.

Es sei U eine irreduzible Teilmannigfaltigkeit von V über k. Zu U gehört in R ein gewisses graduiertes Primideal Π_U als sein Relationenideal, und umgekehrt gehört zu jedem „nichttrivialen" graduierten Primideal von R eine eindeutig bestimmte irreduzible Teilmannigfaltigkeit von V. Dabei bezeichnet man als das „triviale" Primideal das Ideal

$$\mathsf{N} = \sum_{\nu \geq 1} \mathsf{R}_\nu;$$

ihm entspricht keine Teilmannigfaltigkeit von V.

Zur Vereinfachung der Schreibweise schreiben wir im folgenden an Stelle von $b \not\equiv 0 \bmod \Pi_U$ (bzw. $b \equiv 0 \bmod \Pi_U$) einfach $b \not\equiv 0 \bmod U$ (bzw. $b \equiv 0 \bmod U$).

Bei vorgegebener irreduzibler Teilmannigfaltigkeit U von V bilden die Elemente $b \in \mathsf{R}$ mit $b \not\equiv 0 \bmod U$ ein multiplikativ abgeschlossenes System. Man bildet nun den zugehörigen *Quotientenring*, bestehend aus allen Quotienten a/b mit $a \in \mathsf{R}$, $b \in \mathsf{R}$, $b \not\equiv 0 \bmod U$. Die allgemeinen Sätze über Quotientenringe setzen wir hier als bekannt voraus. Von besonderer Bedeutung ist für die algebraische Geometrie der sogenannte „reduzierte" Quotientenring, welcher entsteht, indem man nur diejenigen Quotienten a/b betrachtet, für welche a, b homogen und vom selben Grade sind. Wir bezeichnen den reduzierten Quotientenring mit $\mathfrak{O}_U$. Dies ist der sogenannte *Stellenring* von U in K. Den vollen Quotientenring bezeichnen wir mit $\mathfrak{O}_U^*$. Offenbar besteht $\mathfrak{O}_U$ aus genau den homogenen Elementen vom Grade 0 aus $\mathfrak{O}_U^*$, d. h. es gilt

$$\mathfrak{O}_U = \mathfrak{O}_U^* \cap \mathsf{K}. \tag{1}$$

Die Gesamtheit der zu den irreduziblen Teilmannigfaltigkeiten U von V gehörigen Stellenringe $\mathfrak{O}_U$ bezeichnet man nach Lang als das *Skelett* von V.

Wir betrachten nun graduierte R-Ideale $\mathfrak{A}$ aus K^*. Jedes $\mathfrak{A}$ erzeugt durch Quotientenbildung ein $\mathfrak{O}_U$-Ideal $\mathfrak{A}_U$. Dieses besteht aus allen Quotienten a/b, wobei a, b homogene Elemente gleichen Grades sind mit $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathsf{R}$, $b \not\equiv 0 \bmod U$. Wir nennen die Gesamtheit der so entstehenden lokalen Ideale $\mathfrak{A}_U$ das *Skelett* von $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{A} = \mathsf{R}$, so ist das Skelett von R gerade gleich dem Skelett von V.

Wir stellen nun die folgende Frage: Wann besitzen zwei graduierte R-Ideale dasselbe Skelett?

Lemma 1. *Zwei graduierte* R*-Ideale* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *besitzen genau dann dasselbe Skelett, wenn sie wesentlich gleich sind im Sinne der Definition aus Abschnitt* 10.

(Zu diesem Lemma vgl. Serre [17] S. 258, Prop. 5.)

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es zu zeigen, daß die Aussage

(2) $$\mathfrak{A}_U < \mathfrak{B}_U \text{ für alle } U$$

gleichbedeutend ist mit der Aussage

(3) $$\mathfrak{A}_\nu < \mathfrak{B}_\nu \text{ für hinreichend große } \nu.$$

Wir betrachten zunächst die Aussage (3). Sei N das triviale Primideal von R. Bekanntlich sind $\mathsf{N}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}$ wesentlich gleich; vgl. dazu etwa Lang [10] S. 102, letzte Zeile. Für jede Potenz N^s sind daher $\mathsf{N}^s\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}$ wesentlich gleich. Wegen

$$\mathsf{N}^s = \sum_{\nu \geq s} \mathsf{R}_\nu$$

kann man durch hinreichend große Wahl von s erreichen, daß die homogenen Komponenten von $\mathsf{N}^s\mathfrak{A}$ bis zu einer beliebig vorgegebenen Schranke verschwinden. Daher ist also (3) gleichbedeutend mit der Relation

$$\mathsf{N}^s\mathfrak{A} < \mathfrak{B} \quad \text{für hinreichend große } s.$$

Dies wiederum besagt

(4) $$\mathsf{N}^s < \mathfrak{B} : \mathfrak{A} \quad \text{für hinreichend große } s,$$

wobei wir mit $\mathfrak{B} : \mathfrak{A}$ das Quotientenideal bezeichnen, bestehend aus allen Elementen $u \in \mathsf{R}$ mit $u\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$. Da $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *graduiert* sind, so ist $\mathfrak{B} : \mathfrak{A}$ ebenfalls graduiert. Insbesondere folgt daraus, daß die zu $\mathfrak{B} : \mathfrak{A}$ gehörigen Primideale sämtlich graduiert sind. Da nun N ein *maximales* Primideal von R ist, so besagt (4), daß $\mathfrak{B} : \mathfrak{A}$ ein zu N gehöriges Primärideal ist (eventuell ist $\mathfrak{B} : \mathfrak{A} = \mathsf{R}$; man muß also R selbst als (das zu dem Exponenten 0 gehörige) Primärideal zu N betrachten.) Das wiederum bedeutet, daß $\mathfrak{B} : \mathfrak{A}$ in keinem graduierten Primideal $\neq \mathsf{N}$ von R enthalten ist; also

(5) $$\mathfrak{B} : \mathfrak{A} \not\equiv 0 \bmod U \quad \text{für alle } U.$$

Wir haben also zu zeigen, daß (2) mit (5) gleichbedeutend ist. Wir zeigen genauer, daß (2), ausgesprochen für ein festes U, gleichbedeutend ist mit (5), ausgesprochen für eben dieses U.

Zunächst nehmen wir an, es gelte (5). Es sei a/u ein beliebiges Element aus $\mathfrak{A}_U$, wobei a, u homogene Elemente gleichen Grades sind mit $a \in \mathfrak{A}$, $u \in \mathsf{R}$, $u \not\equiv 0 \bmod U$. Nach (5) gibt es ein homogenes Element $q \in \mathsf{R}$, $q \not\equiv 0 \bmod U$ derart, daß $qa \in \mathfrak{B}$ ist. Demnach ist also das Element $a/u = qa/qu$ in $\mathfrak{B}_U$ enthalten. Es folgt also in der Tat (2).

Umgekehrt nehmen wir jetzt an, es gelte (2). Sei a ein beliebiges homogenes Element aus $\mathfrak{A}$, und sei u ein homogenes Element 1. Grades aus R mit $u \not\equiv 0 \bmod U$ (ein solches u gibt es). Für eine geeignete Potenz u^ν ist der Grad von $u^\nu a$ positiv. Sei dieser Grad gleich μ; dann ist $u^\nu a/u^\mu$ konstruktionsgemäß ein Element aus $\mathfrak{A}_U$. Nach (2) ist es in $\mathfrak{B}_U$ enthalten, besitzt also eine Darstellung der Form b/v mit homogenen, gleichgradigen Elementen b, v mit $b \in \mathfrak{B}$, $v \in \mathsf{R}$, $v \not\equiv 0 \bmod U$. Setzt man zur Abkürzung $\alpha = vu^\nu$, so gilt also

$$\alpha a \in \mathfrak{B}, \quad \alpha \not\equiv 0 \bmod U.$$

Lassen wir hierin a ein endliches Erzeugendensystem von $\mathfrak{A}$ bezüglich R durchlaufen, und bestimmen zu jedem a ein zugehöriges α, und bezeichnen das Produkt dieser α mit q, so folgt also

$$q\mathfrak{A} < \mathfrak{B}, \quad q \not\equiv 0 \bmod U.$$

Also gilt (5). Das war zu zeigen.

Nunmehr wollen wir Divisoren auf V betrachten. Damit das sinnvoll ist, haben wir vorauszusetzen:

V ist ganzabgeschlossen.

Das soll genauer bedeuten, daß jeder Stellenring $\mathfrak{O}_U$ aus dem Skelett von V ganzabgeschlossen sein soll. (Zariski und seine Schule nennen V dann „locally normal everywhere"). Bekanntlich ist das damit gleichbedeutend, daß für jedes U der volle Quotientenring $\mathfrak{O}_U^*$ ganzabgeschlossen ist; vgl. dazu Lang [10] S. 96, Prop. 3. Ferner setzen wir voraus:

$$r = \dim V \geqq 1.$$

Wir betrachten die irreduziblen Teilmannigfaltigkeiten P von V der Dimension $r-1$. Für eine solche ist $\mathfrak{O}_P$ ein ganzabgeschlossener Stellenring der idealtheoretischen Dimension 1, also bekanntlich ein Bewertungsring. Daher bestimmt P nach der allgemeinen Definition in Abschnitt 4 eindeutig einen *Primdivisor* von K (über k). Wir können und wollen die irreduzible Teilmannigfaltigkeit P von V der Dimension $r-1$ mit dem zugehörigen Primdivisor von K identifizieren. Die Wertgruppe von P ist diskret und vom Rang 1; sie kann und soll mit der additiven Gruppe der ganzrationalen Zahlen identifiziert werden.

Die so definierten V-Primdivisoren P von K erzeugen als freie Erzeugende eine Abelsche Gruppe, deren Elemente die *Divisoren* von V genannt werden. Ein Divisor A ist also nicht anderes als eine formale Summe $A = \sum_P w_P(A)P$ mit ganzrationalen Koeffizienten $w_P(A)$, von denen nur endlich viele nicht verschwinden.

Jedem Divisor A von V ordnen wir ein System von lokalen $\mathfrak{O}_U$-Idealen $\mathfrak{A}_U$ zu, das wir das *Skelett* von A nennen, und zwar ist $\mathfrak{A}_U$ für jede irreduzible Teilmannigfaltigkeit U von V folgendermaßen definiert:

$\mathfrak{A}_U$ besteht aus genau denjenigen Elementen $a \in \mathsf{K}$, für welche gilt $w_P(a) \geqq w_P(A)$ für alle P mit $U < P$.

Hierbei bedeutet $U < P$, daß U als Teilmannigfaltigkeit von V in P enthalten ist. Das ist offenbar gleichbedeutend mit der folgenden Aussage: Für jedes homogene Element $b \in \mathsf{R}$ folgt aus $b \not\equiv 0 \bmod U$ die Relation $b \not\equiv 0 \bmod P$. Durch Bildung von Quotientenringen ergibt sich, daß dies gleichbedeutend ist mit der Relation $\mathfrak{O}_U < \mathfrak{O}_P$.

Wir nennen $\mathfrak{A}_U$ das lokale Vielfachenideal von A in U. Die Tatsache, daß $\mathfrak{A}_U$ tatsächlich ein $\mathfrak{O}_U$-Ideal ist, kann leicht verifiziert werden.

Wir fragen nun: Gibt es zu vorgegebenem Divisor A von V stets ein graduiertes R-Ideal $\mathfrak{A}$, dessen Skelett mit dem Skelett von A übereinstimmt? Anders formuliert: Können die lokalen Vielfachenideale von A durch ein „globales" Ideal $\mathfrak{A}$ erzeugt werden?

Definition. *Ein graduiertes R-Ideal $\mathfrak{A}$, dessen Skelett mit dem Skelett des V-Divisors A übereinstimmt, soll ein Vielfachenideal von A genannt werden.*

Gibt es überhaupt ein Vielfachenideal von A, so ist es nach Lemma 1 bis auf wesentliche Gleichheit eindeutig bestimmt.

Beweis der Existenz eines Vielfachenideals von A.

Wir gehen aus der von folgenden trivialen, aber für uns wichtigen Bemerkung: *Eine irreduzible $(r-1)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit P von V bestimmt nicht nur einen Primdivisor von K, sondern auch einen von K^*.*

In der Tat: Sei $\mathfrak{O}_P^*$ der zu P gehörige volle Quotientenring von R, wie er oben eingeführt wurde. Auch $\mathfrak{O}_P^*$ ist als ganzabgeschlossener Stellenring der idealtheoretischen Dimension 1 ein Bewertungsring. Er bestimmt also einen Primdivisor P^* von K^*. Nach (1),

angewandt auf P, ergibt sich, daß P^* eine Fortsetzung von P ist. Es ist leicht zu zeigen, daß P^* unverzweigt und träge ist über P, und daß P^* eindeutig bestimmt ist durch P als derjenige Primdivisor von K^*, für den yP^* gleich dem System der homogenen Koordinaten eines allgemeinen Punktes von P über k ist. (Das zeigt man ganz ähnlich wie beim Beweis des 1. Ergänzungssatzes aus Abschnitt 7.) Im Hinblick hierauf werden wir im folgenden P mit P^* identifizieren, schreiben also $P^* = P$. Demnach ist die Bewertung w_P nicht nur für die Elemente aus K, sondern auch für die Elemente aus K^* definiert. Diese Bemerkung bildet den Ausgangspunkt für die nachfolgende Konstruktion eines Vielfachenideals zu einem Divisor A.

Zu vorgegebenem Divisor A von V bilden wir den k-Modul $\mathfrak{A}_\nu$ der homogenen Elemente ν-ten Grades $a \in \mathsf{K}^*$, welche der Bedingung

$$(6) \qquad w_P(a) \geqq w_P(A) \qquad \text{für alle } P$$

genügen. Wir setzen

$$\mathfrak{A} = \sum_\nu \mathfrak{A}_\nu,$$

summiert über alle ganzrationalen Zahlen ν. Wir zeigen der Reihe nach:

(i) $\mathfrak{A}$ *ist ein graduiertes* R-*Ideal*;

(ii) $\mathfrak{A}$ *ist ein Vielfachenideal von* A.

Zu (i). Jedenfalls ist $\mathfrak{A}$ ein R-Modul, denn es gilt ja $w_P(\mathsf{R}) \geqq 0$ für alle V-Primdivisoren P. Ferner ist $\mathfrak{A}$ graduiert, denn definitionsgemäß ist $\mathfrak{A}$ direkte Summe von homogenen Moduln $\mathfrak{A}_\nu$. Es bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{A}$ als R-Modul endlich ist.

Annahme, wir hätten diesen Endlichkeitsbeweis bereits geführt für einen einzigen Divisor B von V und den zugehörigen R-Modul $\mathfrak{B}$. Dann ergibt sich die Endlichkeit auch für jeden Divisor A, der Vielfaches von B ist; denn dann ist definitionsgemäß $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$, und daher $\mathfrak{A}$ als Teilmodul eines endlichen R-Moduls selbst endlich. — Ferner ist mit $\mathfrak{B}$ auch $t\mathfrak{B}$ ein endlicher R-Modul, für jedes homogene Element $t \neq 0$ aus K^*. Offenbar gehört der R-Modul $t\mathfrak{B}$ im Sinne der obigen Konstruktion zum Divisor $(t) + B$[8]). Nach dem eben Gesagten ergibt sich daher die Endlichkeit des R-Moduls $\mathfrak{A}$ für jeden Divisor A, für welchen es ein t gibt derart, daß A Vielfaches von $(t) + B$ ist. Ein solches t gibt es nun aber zu *jedem* Divisor A. Machen wir nämlich den Ansatz $t = 1/u$ mit einem homogenen Element $u \in \mathsf{R}$, so ergibt sich als Bedingung für u die Relation

$$w_P(u) \geqq w_P(B) - w_P(A), \qquad \text{für alle } P.$$

Ein solches homogenes Element $u \in \mathsf{R}$ kann nun leicht folgendermaßen konstruiert werden: Zu jedem P wähle man ein homogenes Element $u_P \neq 0$ aus R mit $u_P \equiv 0 \bmod P$, also $w_P(u_P) \geqq 1$. Bedeutet m_P das Maximum der Zahlen 0 und $w_P(B) - w_P(A)$, so ist m_P stets $\geqq 0$, und > 0 nur für endlich viele P. Es genügt nun, u gleich dem Potenzprodukt $u = \prod_P u_P^{m_P}$ zu setzen, um die angegebene Bedingung zu erfüllen.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich, daß wir den Endlichkeitsbeweis nur für *einen einzigen* Divisor B von V und den zugehörigen Modul $\mathfrak{B}$ zu führen haben. Wir betrachten

---

[8]) Für ein homogenes Element $t \neq 0$ aus K^* bezeichnen wir mit (t) denjenigen V-Divisor, dessen Vielfachheiten gerade gleich $w_P(t)$, für alle P, sind. Das ist sinnvoll, denn man beweist leicht, daß es nur endlich viele P gibt mit $w_P(t) \neq 0$. Offenbar ist t durch seinen Divisor (t) eindeutig bestimmt bis auf Faktoren, die algebraisch sind über k. Man beachte, daß (t) nur dann ein Hauptdivisor im Sinne der Divisortheorie ist, wenn $t \in \mathsf{K}$ ist, d. h. wenn t den Grad 0 besitzt. Wenn t ein homogenes Element vom Grade $\nu > 0$ aus R ist, so bezeichnet man (t) in der algebraischen Geometrie als einen „Hyperflächenschnitt" ν-ten Grades. (Vgl. Zariski [23] S. 562; dort wird übrigens die Bezeichnung $Z(t)$ an Stelle von (t) verwendet.) Ein V-Divisor D ist genau dann äquivalent zu einem Hyperflächenschnitt ν-ten Grades (mit $\nu > 0$), wenn $D = (t)$ mit einem homogenen Element t vom Grade ν aus K^* gilt.

dazu den Nulldivisor $B = 0$. Für diesen wird $\mathfrak{B}$ erzeugt von denjenigen homogenen Elementen $a \in \mathsf{K}^*$, für welche $w_P(a) \geqq 0$ für alle P ist, d. h. für welche der Divisor (a) ein *ganzer* Divisor ist.

Andererseits betrachten wir die ganzabgeschlossene Hülle R^* von R in K^*. Diese ist bekanntlich ein graduierter R-Modul [9]), wird also erzeugt durch die *homogenen* Elemente welche ganz sind über R. Da R^* nach F. K. Schmidt ein endlicher R-Modul ist, so genügt es also zu zeigen, daß $\mathsf{R}^* = \mathfrak{B}$, d. h. daß das folgende Lemma richtig ist:

Lemma 2. *Ein homogenes Element $a \neq 0$ aus K^* ist genau dann ganz über R, wenn sein Divisor (a) ein ganzer Divisor ist.*

Dieses Lemma ist bis auf seine Formulierung im wesentlichen identisch mit einem Satz von Zariski über die Hyperflächenschnitte einer Mannigfaltigkeit; vgl. [23] S. 562, Th. 1 [10]). Ferner ist es (bis auf die Terminologie) gleichbedeutend mit einem Satz bei Snapper [20] II, S. 25, St. 3. 2. Im Hinblick auf diese Literaturangaben verzichten wir auf einen Beweis von Lemma 2 an dieser Stelle, da es sich ja um einen wohlbekannten Satz handelt.

Damit ist also in der Tat gezeigt, daß $\mathfrak{A}$ für jeden Divisor A ein graduiertes R-Ideal ist.

Bemerkung. Man beachte die formale Ähnlichkeit dieses Beweises mit dem üblichen Beweis dafür, daß (bei Funktionenkörpern vom Transzendenzgrad 1) die Dimension eines jeden Divisors A endlich ist; vgl. z. B. Lang [10] S. 123 unten. Diese Ähnlichkeit ist nun mehr als formal, denn unser Beweis ergibt von selbst die Endlichkeit der Dimension eines jeden Divisors A auch bei höherem Transzendenzgrad. Definitionsgemäß ist nämlich $\dim A$ gleich der k-Dimension des k-Moduls $\mathfrak{A}_0$ der homogenen Elemente 0-ten Grades aus dem Modul $\mathfrak{A}$. Da nun $\mathfrak{A}$ als R-Modul endlich ist, so ergibt sich leicht, daß $\mathfrak{A}_\nu$ für jedes ν als k-Modul endlich ist, also auch $\mathfrak{A}_0$.

Zu (ii). Es sei auch weiterhin $\mathfrak{A}$ der durch (6) definierte R-Modul. Wir haben zu zeigen, daß für jede irreduzible Teilmannigfaltigkeit U von V die Elemente z aus $\mathfrak{A}_U$ innerhalb K gekennzeichnet sind durch die Eigenschaft

$$w_P(z) \geqq w_P(A) \qquad \text{für alle } P \text{ mit } U < P.$$

Im Hinblick auf spätere Anwendungen zeigen wir gleich ein wenig mehr. Sei dazu

S ein beliebiges multiplikativ-abgeschlossenes System von homogenen Elementen $\neq 0$ aus R;

$\mathfrak{O}_S$ der zugehörige reduzierte Quotientenring von R, bestehend aus den Quotienten u/s mit homogenen Elementen gleichen Grades $u \in \mathsf{R}$, $s \in S$;

$\mathfrak{A}_S$ das durch $\mathfrak{A}$ bestimmte $\mathfrak{O}_S$-Ideal, bestehend aus den Quotienten a/s mit homogenen gleichgradigen Elementen $a \in \mathfrak{A}$, $s \in S$.

Wir sagen, es sei P „fremd" zu S, wenn für jedes Element $s \in S$ gilt $s \not\equiv 0 \bmod P$. In dieser Situation behaupten wir:

(7) *Die Elemente $z \in \mathfrak{A}_S$ sind innerhalb K gekennzeichnet durch die Eigenschaft*

$$w_P(z) \geqq w_P(A) \qquad \textit{für alle zu } S \textit{ fremden } P.$$

---

[9]) Für die hier und im folgenden zu benutzenden Sätze aus der projektiven Geometrie verweisen wir ein für allemal auf die einschlägige Literatur, z. B. auf Lang [10].

[10]) Bei der Formulierung von Zariski muß übrigens die Voraussetzung erwähnt werden, daß $D \geqq 0$ (in der dortigen Bezeichnungsweise); das entspricht der Tatsache in unserem Lemma 2, daß der Divisor (a) ganz sein soll.

Es ist klar, daß die ursprüngliche Behauptung (ii) aus dieser allgemeineren Aussage hervorgeht, wenn man für S das multiplikativ-abgeschlossene System der homogenen Elemente $\not\equiv 0 \bmod U$ wählt.

Zum Beweis von (7) nehmen wir zunächst an, es sei $z \in \mathfrak{A}_S$, also $z = a/s$ mit $a \in \mathfrak{A}$, $s \in S$. Wegen $s \not\equiv 0 \bmod P$ gilt $w_P(s) = 0$, also $w_P(z) = w_P(a) \geqq w_P(A)$ für alle zu S fremden P. — Umgekehrt werde jetzt angenommen, z besitze die Eigenschaft (7). Es ist zu zeigen, daß $z \in \mathfrak{A}_S$. Das bedeutet: Es gibt ein Element $s \in S$ derart, daß $sz \in \mathfrak{A}$ gilt, d. h.

$$w_P(s) \geqq -w_P(z) + w_P(A) \qquad \text{für alle } P.$$

Diese Relation ist nun sicher für die zu S fremden P nach Voraussetzung erfüllt. Es bleibt also zu zeigen, daß man irgendwelche bewertungstheoretischen Bedingungen der Form

$$w_P(s) \geqq m_P \qquad \text{für alle nicht zu } S \text{ fremden } P$$

durch ein Element $s \in S$ erfüllen kann; dabei bedeuten die m_P vorgegebene ganzrationale Zahlen $\geqq 0$, von denen nur endlich viele nicht verschwinden. — Nun gibt es für jedes nicht zu S fremde P ein Element $s_P \in S$ mit $s_P \equiv 0 \bmod P$, also $w_P(s_P) \geqq 1$. Man kann dann $s = \prod_P s_P^{m_P}$ setzen, um die angegebene Bedingung zu erfüllen. Damit ist (7) bewiesen.

Hiermit ist der Beweis der Existenz eines Vielfachenideals zu jedem Divisor A von V beendet. Auf Grund der Konstruktion von $\mathfrak{A}$ gemäß (6), und wegen Lemma 1 ergibt sich unmittelbar das folgende

Lemma 3. (*Bewertungstheoretische Kennzeichnung der Vielfachenideale.*) *Ein graduiertes* R*-Ideal* $\mathfrak{A}$ *ist genau dann Vielfachenideal eines Divisors* A *von* V, *wenn für hinreichend große* ν *die Elemente* a *aus* $\mathfrak{A}_\nu$ *innerhalb* K_ν^* *gekennzeichnet sind durch die Eigenschaft* $w_P(a) \geqq w_P(A)$ *für alle Primdivisoren* P *von* V.

Dieses Ergebnis rechtfertigt eigentlich erst die Bezeichnung „Vielfachenideal".

Aus Lemma 3 ergibt sich unmittelbar, daß sich die arithmetischen Relationen der Teilbarkeit und der Äquivalenz zwischen Divisoren A, B in den entsprechenden Relationen ihrer Vielfachenideale $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ widerspiegeln. Genau dann ist nämlich A ein Teiler von B, wenn $\mathfrak{B}_\nu \subset \mathfrak{A}_\nu$ für alle hinreichend großen ν gilt; wir sagen dann, $\mathfrak{B}$ sei wesentlich in $\mathfrak{A}$ enthalten. Genau dann ist ferner A äquivalent zu B, d. h. $A = (z) + B$ mit $z \in \mathsf{K}$, wenn $\mathfrak{A}$ und $z\mathfrak{B}$ wesentlich gleich sind.

Jetzt fragen wir weiter, ob sich die Addition von Divisoren in der Multiplikation der Vielfachenideale widerspiegelt. Man wird natürlich versuchen, den folgenden Satz zu beweisen: Sind A, B, C Divisoren von V mit Vielfachenidealen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, so gilt genau dann $A + B = C$, wenn $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ wesentlich gleich sind. Wir untersuchen also, unter welchen Bedingungen dieser Satz gültig ist.

Zunächst gilt, nach Definition der Quotientenideale, für irgend zwei graduierte R-Ideale $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die Formel

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})_U = \mathfrak{A}_U \mathfrak{B}_U \qquad \text{für alle } U. \tag{8}$$

Folglich ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ genau dann wesentlich gleich zu $\mathfrak{C}$, wenn $\mathfrak{A}_U \mathfrak{B}_U = \mathfrak{C}_U$ ist für alle U (nach Lemma 1). Wie muß nun V beschaffen sein, damit die Relation $A + B = C$ zwischen Divisoren gleichbedeutend ist mit der Relation $\mathfrak{A}_U \mathfrak{B}_U = \mathfrak{C}_U$ zwischen ihren lokalen Vielfachenidealen? Antwort auf diese Frage gibt ein Satz von Krull, welcher als notwendige und hinreichende Bedingung aufstellt: Jeder Stellenring $\mathfrak{O}_U$ des Skeletts von V soll ein

ZPE-Ring sein. Das soll bedeuten: In $\mathfrak{O}_U$ soll sich jedes Element bis auf Einheiten eindeutig in Primelemente zerlegen lassen. Vgl. dazu Krull [7] S. 234, Satz 7.

Wir nennen demgemäß V eine ZPE-Mannigfaltigkeit, wenn das Skelett von V aus lauter ZPE-Ringen besteht.[11]) Offenbar ist eine ZPE-Mannigfaltigkeit ganzabgeschlossen. Wir haben also vorauszusetzen:

V ist eine ZPE-Mannigfaltigkeit.

Unter dieser Voraussetzung gilt nach dem oben Gesagten das folgende

Lemma 4. *Ordnet man jedem Divisor A von V sein Vielfachenideal $\mathfrak{A}$ zu, so ist diese Zuordnung (falls man wesentlich gleiche Ideale nicht unterscheidet) ein Isomorphismus sowohl hinsichtlich der Gruppenoperation, als auch hinsichtlich der arithmetischen Relationen der Teilbarkeit und der Äquivalenz.*

Dieses Lemma ist die Grundlage für unseren Beweis der Sätze II und III.

Wir beenden diesen Abschnitt mit dem folgenden Kriterium für Vielfachenideale:

Lemma 5. *Sei V eine ZPE-Mannigfaltigkeit. Ein graduiertes R-Ideal $\mathfrak{A}$ ist genau dann ein Vielfachenideal eines V-Divisors, wenn jedes Ideal $\mathfrak{A}_U$ des Skeletts von $\mathfrak{A}$ ein Hauptideal ist.*

Beweis. Ist $\mathfrak{A}$ ein Vielfachenideal, so ist natürlich $\mathfrak{A}_U$ ein Hauptideal (nach Definition der ZPE-Mannigfaltigkeit). Es ist also umgekehrt zu zeigen, daß dann, wenn jedes $\mathfrak{A}_U$ durch ein einziges Element $a_U \neq 0$ aus K erzeugt wird, $\mathfrak{A}$ ein Vielfachenideal eines gewissen Divisors A von V ist.

Falls A existiert, so muß notwendig gelten

$$w_P(A) = w_P(a_U) \qquad \text{für } U < P. \tag{9}$$

Um nun die Existenz von A zu beweisen, versuchen wir, A durch die Formel (9) zu *definieren*; falls das möglich ist, so ist offenbar das durch a_U erzeugte $\mathfrak{O}_U$-Ideal, nämlich $\mathfrak{A}_U$, gleich dem lokalen U-Vielfachenideal von A. Daraus ergibt sich dann, daß in der Tat $\mathfrak{A}$ ein Vielfachenideal von A ist.

Wir haben also zu zeigen, daß durch die Formel (9) in der Tat eindeutig ein Divisor A von V bestimmt wird. Das läuft auf den Beweis der folgenden beiden Aussagen hinaus: (a) die Zahl $w_P(a_U)$ für $U < P$ hängt nur von P, und nicht von der Wahl von U mit $U < P$ ab; (b) $w_P(a_U) \neq 0$ nur für endlich viele P. Diese beiden Aussagen werden bewiesen durch die Formel

$$w_P(a_U) = \operatorname*{Min}_{a \in \mathfrak{A}} w_P(a) \qquad \text{für } U < P. \tag{9a}$$

Zum Beweis dieser Formel bemerken wir zunächst, daß offenbar gilt

$$w_P(a_U) = \operatorname*{Min}_{z \in \mathfrak{A}_U} w_P(z) \qquad \text{für } U < P; \tag{10}$$

denn a_U ist ja Erzeugende des $\mathfrak{O}_U$-Ideals $\mathfrak{A}_U$. Jedes zur Konkurrenz zugelassene z besitzt eine Darstellung $z = a/b$ mit $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathsf{R}$, $b \not\equiv 0 \bmod U$, wobei noch a, b homogen vom gleichen Grade sind. Dabei kommt offenbar *jedes* homogene Element positiven Grades $a \in \mathfrak{A}$ bei der Darstellung mindestens eines z vor. Wegen $b \not\equiv 0 \bmod U$ gilt ferner $w_P(b) = 0$ für alle P mit $U < P$. Es folgt also $w_P(z) = w_P(a)$. Daraus ergibt sich nach (10)

$$w_P(a_U) = \operatorname*{Min}_{a \in \mathfrak{A}}{}' w_P(a) \qquad \text{für } U < P,$$

[11]) In der algebraischen Geometrie pflegt man die ZPE-Eigenschaft einer Mannigfaltigkeit V folgendermaßen zu beschreiben: „Jeder Divisor von V ist im Kleinen zu 0 äquivalent".

wobei hier der Strich bei der Bildung des Minimums andeutet, daß man sich auf die homogenen Elemente positiven Grades zu beschränken hat. Diese Beschränkung ist aber unnötig, denn erstens kann jedes homogene Element $a \in \mathfrak{A}$ durch Multiplikation mit einem geeigneten $b \in \mathsf{R}$, $w_P(b) = 0$ in ein Element positiven Grades verwandelt werden. Zweitens wird $\mathfrak{A}$ als graduiertes Ideal durch *homogene* Elemente erzeugt. Es gilt also in der Tat (9a), was zu zeigen war.

Bemerkung. Aus dem Beweis folgt für jedes Vielfachenideal $\mathfrak{A}$ eines Divisors A von V die Formel

$$w_P(A) = \operatorname*{Min}_{a \in \mathfrak{A}} w_P(a) \qquad \text{für alle } P. \tag{11}$$

Diese Formel ist nicht an die Voraussetzung gebunden, daß V eine ZPE-Mannigfaltigkeit ist. Sie bleibt ferner gültig, wenn man in ihr $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}_\nu$ ersetzt, sobald nur ν hinreichend groß ist.

12. Ansatz zum Beweis der Sätze II und III. Formulierung der Reduktionssätze für Vielfachenideale. Nach den Vorbereitungen im letzten Abschnitt gehen wir jetzt daran, die Sätze II und III zu beweisen. Zunächst behandeln wir den Satz II. Wir müssen dazu jedem Divisor A von V einen Divisor $A\mathfrak{p}$ von $V\mathfrak{p}$ zuordnen. Wir wollen die folgende Definition aufstellen:

Definition. *Es sei A ein V-Divisor, und $\mathfrak{A}$ ein Vielfachenideal von A. Dann sei $A\mathfrak{p}$ derjenige $V\mathfrak{p}$-Divisor, dessen Vielfachenideal gleich $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$ ist.*

Wir bemerken hier noch einmal, daß das Symbol $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$ im Sinne der Identifikation am Schluß von Abschnitt 10 zu lesen ist: $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$ ist die Menge der aus den Elementen von $\mathfrak{A}$ durch Reduktion modulo $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^*$ hervorgehenden Elemente.

Zunächst haben wir uns zu überlegen, ob die Definition sinnvoll ist. Jedenfalls wissen wir, daß $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$ ein graduiertes $\mathsf{R}\mathfrak{p}$-Ideal ist (Abschnitt 10, 1. Folgerung). Wir haben also zu zeigen:

1. Reduktionssatz. *Ist $\mathfrak{A}$ ein graduiertes R-Ideal, welches Vielfachenideal eines V-Divisors ist, so ist das graduierte $\mathsf{R}\mathfrak{p}$-Ideal $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$ Vielfachenideal eines $V\mathfrak{p}$-Divisors.*

Nehmen wir an, dieser Reduktionssatz sei bereits bewiesen. Dann gibt es also einen gewissen $V\mathfrak{p}$-Divisor $A\mathfrak{p}$, dessen Vielfachenideal gleich $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$ ist. $A\mathfrak{p}$ hängt nur von A, und nicht von der Wahl von $\mathfrak{A}$ als Vielfachenideal von A ab. Das ergibt sich unmittelbar aus 10, Folgerung 2 und 11, Lemma 1. Demnach ist also jedem V-Divisor A vermöge der obigen Definition eindeutig ein gewisser $V\mathfrak{p}$-Divisor $A\mathfrak{p}$ zugeordnet.

Ist A ein Teiler von B, so ist $\mathfrak{B}$ wesentlich in $\mathfrak{A}$ enthalten (nach 11, Lemma 4); also ist $\mathfrak{B}\mathfrak{p}$ wesentlich in $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$ enthalten (nach 10, Folgerung 2), also ist $A\mathfrak{p}$ ein Teiler von $B\mathfrak{p}$ (wiederum nach 11, Lemma 4). Also bleibt die Relation der Teilbarkeit bei der Abbildung $A \to A\mathfrak{p}$ erhalten.

Ist A äquivalent zu B, so ist $A = (z) + B$ mit $z \neq 0$ aus K. Dann sind $\mathfrak{A}$ und $z\mathfrak{B}$ wesentlich gleich (nach 11, Lemma 4). Wir können z durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor aus k so normieren, daß $w_\mathfrak{p}(z) = 0$, d. h. $z\mathfrak{p} \neq 0, \infty$ wird (nach dem Trägheitssatz, weil jeder träge Primdivisor unverzweigt ist). Es folgt, daß $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$ und $z\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{p}$ wesentlich gleich sind (nach 10, Folgerung 2); also sind $A\mathfrak{p}$ und $B\mathfrak{p}$ äquivalent. Folglich bleibt die Relation der Äquivalenz bei der Abbildung $A \to A\mathfrak{p}$ erhalten.

Um nun schließlich noch zu zeigen, daß die Abbildung $A \to A\mathfrak{p}$ ein Homomorphismus ist, haben wir nach 11, Lemma 4 den folgenden Satz zu beweisen:

2. Reduktionssatz. *Es seien* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *zwei graduierte* R*-Ideale, welche Vielfachenideale von* V*-Divisoren sind. Dann ist das Bild* $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{p}$ *ihres Produktes wesentlich gleich dem Produkt* $\mathfrak{A}\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{p}$ *ihrer Bilder.*

Falls also auch dieser Reduktionssatz bewiesen ist, so ergibt sich nach dem oben Gesagten daraus die Richtigkeit von Satz II. Gleichzeitig ergibt sich daraus die Richtigkeit von Satz III, nämlich durch die folgenden Überlegungen:

Es ist bekannt, daß die virtuelle Dimension $\chi(A)$ eines Divisors A von V folgendermaßen berechnet werden kann: Man bilde ein Vielfachenideal $\mathfrak{A}$ von A und dessen Hilbertsches Polynom $\chi_{\mathfrak{A}}(\nu)$, das die Dimension von $\mathfrak{A}_\nu$ berechnet:

$$\chi_{\mathfrak{A}}(\nu) = \dim_{\mathsf{k}} \mathfrak{A}_\nu \qquad \text{für hinreichend große } \nu.$$

Dann ist die virtuelle Dimension von A gleich dem konstanten Koeffizienten dieses Hilbertschen Polynoms, nämlich

$$\chi_{\mathfrak{A}}(0) = \chi(A).$$

Siehe dazu Serre [17] S. 275, Prop. 4. Demnach, und nach der Definition von $A\mathfrak{p}$, genügt es also zum Beweis von Satz III zu zeigen, daß die Hilbertschen Polynome von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$ übereinstimmen. Nach 10, 1. Folgerung läuft das auf den Beweis der Formeln

$$(1) \qquad \dim_{\mathsf{k}} \mathfrak{A}_\nu = \dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathfrak{A}_\nu \mathfrak{p}$$

für hinreichend große ν hinaus. Diese Formeln sind nun nach dem Trägheitssatz sogar für alle ν richtig. Damit ist also gezeigt, daß auch der Satz III richtig ist, sobald nur der 1. Reduktionssatz bewiesen ist.

Bemerkung. Wie der Beweis zeigt, bleibt nicht nur der konstante Koeffizient, sondern das volle Hilbertsche Polynom von A invariant modulo $\mathfrak{p}$. Der höchste Koeffizient ist bekanntlich gleich dem *Grad* des Divisors A im Sinne der projektiven Geometrie. Daher ergibt unser Beweis gleichzeitig die Invarianz des Grades eines Divisors bei Konstantenreduktion, wie bereits in Abschnitt 3 angekündigt.

Wir gehen nun im folgenden an den Beweis der beiden Reduktionssätze. Gemäß den Voraussetzungen in Abschnitt 3 müssen wir dabei voraussetzen, daß die untersuchte Mannigfaltigkeit V konservativ ist modulo $\mathfrak{p}$. Im nächsten Abschnitt präzisieren wir zunächst diese Voraussetzung.

13. Genaue Formulierung der Konservativitätsvoraussetzung. Es sei V irreduzibel. Nach Zariski [22] heißt V *singularitätenfrei*, wenn jeder Stellenring $\mathfrak{O}_U$ des Skeletts von V ein *regulärer* Stellenring ist im Sinne der allgemeinen Theorie von Krull-Zariski. Den Begriff eines regulären Stellenringes und die einfachsten Sätze darüber setzen wir als bekannt voraus und verweisen dieserhalb auf die einschlägige Originalliteratur [22], [6]. (Krull verwendet in seinen Arbeiten übrigens die Bezeichnung „p-Reihenring" an Stelle von „regulärer Stellenring".)

Definition. *V heißt singularitätenfrei modulo $\mathfrak{p}$, wenn V irreduzibel modulo $\mathfrak{p}$ und $V\mathfrak{p}$ singularitätenfrei ist.*

Der für uns wichtige Begriff der Konservativität entsteht aus dem Begriff der Singularitätenfreiheit, indem man gleichzeitig alle Konstantenerweiterungen betrachtet. Das bedeutet folgendes:

Sei k' ein Erweiterungskörper von k. Die Konstantenerweiterung $V\mathsf{k}'$ von V ist definiert als die Nullstellenmannigfaltigkeit (über k') des von $\mathsf{I}(V)$ in $\mathsf{S}\mathsf{k}' = \mathsf{k}'[x]$ erzeugten Ideals $\mathsf{I}(V)\,\mathsf{k}'$. Man nennt V *absolut irreduzibel*, wenn $\mathsf{I}(V)\,\mathsf{k}'$ für jeden Erweiterungskörper k' von k ein Primideal ist; dann ist insbesondere

$$(1) \qquad \mathsf{I}(V)\,\mathsf{k}' = \mathsf{I}(V\mathsf{k}').$$

Wir nennen V *konservativ*, wenn erstens V absolut irreduzibel ist, und wenn zweitens $V\mathfrak{k}'$ singularitätenfrei ist für alle $\mathfrak{k}'$. Ist $\mathfrak{k}$ vollkommen, so ist jede absolut irreduzible und über $\mathfrak{k}$ singularitätenfreie Mannigfaltigkeit V bekanntlich konservativ.

Definition. *V heißt konservativ modulo $\mathfrak{p}$, wenn erstens V irreduzibel ist modulo $\mathfrak{p}$, und wenn zweitens $V\mathfrak{p}$ konservativ ist.*

In diesem Sinne ist also die Konservativitätsvoraussetzung in den Sätzen II und III zu verstehen.

Analog zu 5, Lemma 1 beweisen wir jetzt das

Lemma 1. *Ist V konservativ modulo $\mathfrak{p}$, so ist V selbst konservativ.*

Beweis. (a) Zunächst beweisen wir denjenigen Teil von Lemma 1, der sich auf die absolute Irreduzibilität von V bezieht. Sei dazu $\mathfrak{k}'$ ein Erweiterungskörper von $\mathfrak{k}$; wir haben zu zeigen, daß $\mathfrak{l}\mathfrak{k}'$ ein Primideal ist, wenn wir zur Abkürzung $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(V)$ setzen. Wir setzen $\mathfrak{p}$ zu einem Primdivisor $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{k}'$ fort (was bekanntlich stets möglich ist); sei $\mathfrak{k}'\mathfrak{p}'$ der zugehörige Restkörper. Dieser ist eine Erweiterung von $\mathfrak{k}\mathfrak{p}$. Da $V\mathfrak{p}$ voraussetzungsgemäß absolut irreduzibel ist, und $\mathfrak{l}\mathfrak{p}$ gleich dem Relationenideal von $V\mathfrak{p}$, so folgt, daß $\mathfrak{l}\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{k}'\mathfrak{p}'$ ein Primideal ist. Im Hinblick auf 5, Lemma 1 genügt es demnach, die Formel

$$\mathfrak{l}\mathfrak{k}' \cdot \mathfrak{p}' = \mathfrak{l}\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{k}'\mathfrak{p}' \tag{2}$$

zu beweisen. Hierbei darf $\mathfrak{l}$ ein beliebiger graduierter $\mathfrak{k}$-Teilmodul von $\mathfrak{S} = \mathfrak{k}[x]$ sein.

Es sei $\mathfrak{l} = \sum_\nu \mathfrak{l}_\nu$ die Zerlegung von $\mathfrak{l}$ in homogene Komponenten. Da diese Zerlegung zulässig ist bezüglich $\mathfrak{p}(x)$ (vgl. den Beweis von 9A, Lemma 1), so gilt $\mathfrak{l}\mathfrak{p} = \sum_\nu \mathfrak{l}_\nu\mathfrak{p}$. Andererseits ist $\mathfrak{l}\mathfrak{k}' = \sum_\nu \mathfrak{l}_\nu\mathfrak{k}'$ die Zerlegung von $\mathfrak{l}\mathfrak{k}'$ in homogene Komponenten, und daher gilt $\mathfrak{l}\mathfrak{k}' \cdot \mathfrak{p}' = \sum_\nu \mathfrak{l}_\nu\mathfrak{k}' \cdot \mathfrak{p}'$. Demnach genügt es, an Stelle von (2) die Relation

$$\mathfrak{l}_\nu\mathfrak{k}' \cdot \mathfrak{p}' = \mathfrak{l}_\nu\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{k}'\mathfrak{p}' \tag{2_ν}$$

für jedes ν einzeln zu beweisen. — Hierbei bemerken wir, daß $\mathfrak{l}_\nu$ endlichdimensional ist. Nach 9A, Lemma 2 gibt es daher eine $\mathfrak{p}(x)$-zulässige Basis von $\mathfrak{l}_\nu$; sei diese mit $\{u_i\}$ bezeichnet. Die Aussage (2_ν) läßt sich offenbar auch so aussprechen: $\{u_i\}$ ist nicht nur eine $\mathfrak{p}(x)$-zulässige Basis von $\mathfrak{l}_\nu$, sondern auch eine $\mathfrak{p}'(x)$-zulässige Basis von $\mathfrak{l}_\nu\mathfrak{k}'$. Nun ist $\{u_i\}$ in einer $\mathfrak{p}(x)$-zulässigen Basis von $\mathfrak{S}_\nu$ enthalten (9A, Folgerung 2 zu Lemma 2). Daher genügt es, die entsprechende Aussage für eine $\mathfrak{p}(x)$-zulässige Basis von $\mathfrak{S}_\nu$ zu beweisen, d. h. es genügt, die Formel (2_ν) für den Spezialfall $\mathfrak{l}_\nu = \mathfrak{S}_\nu$ zu beweisen. In diesem Falle ist sie aber trivial, denn die Potenzprodukte in x vom Grade ν bilden offenbar eine $\mathfrak{p}(x)$-zulässige Basis von $\mathfrak{S}_\nu$, und gleichzeitig eine $\mathfrak{p}'(x)$-zulässige Basis von $\mathfrak{S}_\nu\mathfrak{k}'$.

(b) Nunmehr beweisen wir die auf die Konservativität bezügliche Behauptung aus Lemma 1. Wir benutzen dazu das von Zariski aufgestellte, sogenannte Jacobische Kriterium für Konservativität. Dieses läßt sich folgendermaßen formulieren:

Sei $f = \{f_1, \ldots, f_s\}$ ein endliches System von homogenen Polynomen, welche $\mathfrak{l}(V)$ erzeugen. Man bilde die zu f gehörige Jacobische Matrix $J(f)$, deren Elemente die partiellen Ableitungen $\partial f_i/\partial x_j$ sind. Das Jacobische Kriterium besagt nun, daß V genau dann konservativ ist, wenn für jede irreduzible Teilmannigfaltigkeit U von V die Matrix $J(f)$ modulo $\mathfrak{l}(U)$ den Rang $n - r$ besitzt; dabei ist r die Dimension von V, und n die Dimension des einbettenden projektiven Raumes. Vgl. [22] S. 42, Theorem 13.

Um nun (5) zu beweisen, wähle man die $f_i = f_i(x)$ so, daß sie $\mathfrak{p}$-ganze Koeffizienten besitzen, so daß also $f\mathfrak{p} = \{f_1\mathfrak{p}, \ldots, f_s\mathfrak{p}\}$ ist. Dann gilt offenbar

$$J(f)\,\mathfrak{p} = J(f\mathfrak{p}),$$

was man leicht nachrechnet. Ferner können und wollen wir f so wählen, daß $f\mathfrak{p}$ ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{l}(V)\,\mathfrak{p} = \mathfrak{l}(V\mathfrak{p})$ ist.

Sei nun U eine irreduzible Teilmannigfaltigkeit von V. Jedenfalls ist der Rang von $J(f)$ modulo $\mathfrak{l}(U)$ nicht größer als $n - r$ (Zariski [22]). Da sich der Rang einer Matrix bei Anwendung eines Homomorphismus nicht vergrößern kann, so genügt es folglich nach Obigem zu zeigen, daß der Rang von $J(f\mathfrak{p})$ modulo $\mathfrak{l}(U)\,\mathfrak{p}$ gleich $n - r$ ist. Bedeutet $\bar{U}$ einen irreduziblen Bestandteil von $U\mathfrak{p}$, so gilt

$$\mathfrak{l}(U)\,\mathfrak{p} < \mathfrak{l}(U\mathfrak{p}) < \mathfrak{l}(\bar{U}).$$

Daher genügt es zu zeigen, daß der Rang von $J(f\mathfrak{p})$ modulo $\mathfrak{l}(\bar{U})$ gleich $n - r$ ist; das ist aber eine Folge der Konservativität von $V\mathfrak{p}$ (nach dem Jacobischen Kriterium, angewandt auf $V\mathfrak{p}$). Das war zu zeigen.

Bemerkung. Eine singularitätenfreie Mannigfaltigkeit ist nach bekannten Sätzen über Stellenringe stets eine ZPE-Mannigfaltigkeit und insbesondere ganzabgeschlossen; vgl. z. B. Zariski [22]. Daher sind die in Abschnitt 11 besprochenen Sätze über ZPE-Mannigfaltigkeiten im folgenden anwendbar.

14. Beweis der Reduktionssätze im Falle eines diskreten Primdivisors vom Rang 1 mit vollkommenem Restklassenkörper. Sei $\mathfrak{A}$ ein Vielfachenideal eines V-Divisors. Um zu zeigen, daß $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$ ein Vielfachenideal eines $V\mathfrak{p}$-Divisors ist, genügt es nach 11, Lemma 5 zu zeigen, daß für jede irreduzible Teilmannigfaltigkeit $\bar{U}$ von $V\mathfrak{p}$ das Ideal $(\mathfrak{A}\mathfrak{p})_{\bar{U}}$ ein Hauptideal ist. Wir berechnen zunächst das Ideal $(\mathfrak{A}\mathfrak{p})_{\bar{U}}$ auf folgende Weise:

Wir betrachten in R das multiplikativ-abgeschlossene System der homogenen Elemente $s \in \mathsf{R}$ mit

$$(1) \qquad s\mathfrak{p} \neq 0, \infty; \; s\mathfrak{p} \not\equiv 0 \bmod \bar{U}.$$

Hierzu gehört in K ein reduzierter Quotientenring, den wir mit $\mathfrak{O}_{\bar{U}}$ bezeichnen (in Anlehnung an die entsprechende Bezeichnung $\mathfrak{O}_U$ für die irreduziblen Teilmannigfaltigkeiten U von V; man beachte jedoch, daß $\mathfrak{O}_{\bar{U}}$ im allgemeinen *kein* Stellenring ist; er besitzt viele maximale Ideale).

Ist nun $\mathfrak{A}_{\bar{U}}$ das durch $\mathfrak{A}$ erzeugte $\mathfrak{O}_{\bar{U}}$-Ideal, so ergibt sich aus den Definitionen unmittelbar die Formel

$$(2) \qquad (\mathfrak{A}\mathfrak{p})_{\bar{U}} = (\mathfrak{A}_{\bar{U}})\,\mathfrak{p}.$$

In Worten: „Quotientenbildung bezüglich $\bar{U}$ und Restbildung modulo $\mathfrak{p}$ sind vertauschbare Operationen".

Um nun zu zeigen, daß $(\mathfrak{A}\mathfrak{p})_{\bar{U}}$ ein Hauptideal ist, genügt es folglich zu zeigen, daß $(\mathfrak{A}_{\bar{U}})\,\mathfrak{p}$ ein Hauptideal ist. Dazu genügt es bereits zu zeigen:

$$(3) \qquad \mathfrak{A}_{\bar{U}} \textit{ ist Hauptideal.}$$

Nehmen wir nämlich einmal an, es wäre (3) bereits bewiesen. Ist dann $a = a_{\bar{U}}$ eine Erzeugende von $\mathfrak{A}_{\bar{U}}$, so kann sie durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor aus k so normiert werden, daß $a\mathfrak{p} \neq 0, \infty$ ist. Dann ist offenbar $a\mathfrak{p}$ eine Erzeugende von $(\mathfrak{A}_{\bar{U}})\,\mathfrak{p}$.

Um also den 1. Reduktionssatz zu beweisen, genügt es, den Hauptidealsatz (3) zu beweisen. Dieser Satz hat nun gleichzeitig die Gültigkeit des 2. Reduktionssatzes zur Folge. Das sieht man so ein: Sind a, b Erzeugende von $\mathfrak{A}_{\bar{U}}$ bzw. $\mathfrak{B}_{\bar{U}}$, welche prim zu $\mathfrak{p}$ normiert sind, so sind $a\mathfrak{p}, b\mathfrak{p}$ nach dem oben Gesagten Erzeugende von $(\mathfrak{A}_{\bar{U}})\,\mathfrak{p}$ bzw. $(\mathfrak{B}_{\bar{U}})\,\mathfrak{p}$. Also ist $a\mathfrak{p} \cdot b\mathfrak{p}$ eine Erzeugende von $(\mathfrak{A}_{\bar{U}})\,\mathfrak{p} \cdot (\mathfrak{B}_{\bar{U}})\,\mathfrak{p} = (\mathfrak{A}\mathfrak{p})_{\bar{U}} \cdot (\mathfrak{B}\mathfrak{p})_{\bar{U}} = (\mathfrak{A}\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{p})_{\bar{U}}$.

Andererseits ist aber ab eine prim zu $\mathfrak{p}$ normierte Erzeugende von $\mathfrak{A}_{\bar{U}} \cdot \mathfrak{B}_{\bar{U}} = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})_{\bar{U}}$, und daher ist $ab \cdot \mathfrak{p}$ eine Erzeugende von $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})_{\bar{U}} \cdot \mathfrak{p} = (\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{p})_{\bar{U}}$. Zusammengenommen ergibt sich

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{p})_{\bar{U}} = (\mathfrak{A}\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{p})_{\bar{U}}.$$

Da dies für alle irreduziblen Teilmannigfaltigkeiten $\bar{U}$ von $V\mathfrak{p}$ gilt, so ergibt sich aus 11, Lemma 1, daß die Ideale $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{p}$ in der Tat wesentlich gleich sind.

Damit haben wir den Beweis der beiden Reduktionssätze vollständig auf den Beweis von (3) *zurückgeführt.* Diese Behauptung läßt sich nun folgendermaßen interpretieren:

Wir schreiben formal $\bar{U} < P$, wenn P fremd ist zum System der Elemente $s \in \mathsf{R}$ mit der Eigenschaft (1); diese Schreibweise lehnt sich an die obige Schreibweise $U < P$ an. Bedeutet A denjenigen V-Divisor, dessen Vielfachenideal $\mathfrak{A}$ ist, so ergibt sich aus 11, (7), daß die Elemente $z \in \mathfrak{A}_{\bar{U}}$ folgendermaßen bewertungstheoretisch gekennzeichnet werden können:

$$w_P(z) \geqq w_P(A) \quad \text{für alle } P \text{ mit } \bar{U} < P.$$

Hierbei bedeutet offenbar $\bar{U} < P$ nichts anderes als $\mathfrak{O}_{\bar{U}} < \mathfrak{O}_P$; dann ist $\mathfrak{O}_P$ gleich dem Quotientenring von $\mathfrak{O}_{\bar{U}}$ in bezug auf P. Wir schließen daraus, daß $\mathfrak{A}_{\bar{U}}$ ein *Divisorideal* im Sinne der Theorie der ganzabgeschlossenen Integritätsbereiche ist („v-Ideal" in der Terminologie von Krull). Die zu beweisende Aussage (3) besagt also, daß jedes Divisorideal von $\mathfrak{O}_{\bar{U}}$ ein Hauptideal ist. Anders gesprochen: $\mathfrak{O}_{\bar{U}}$ ist ein ZPE-Ring.

Um das zu zeigen, wollen wir ein Kriterium von Krull für ZPE-Ringe anwenden. Allerdings bezieht sich dieses Kriterium nur auf Stellenringe, und $\mathfrak{O}_{\bar{U}}$ ist ja, wie gesagt, im allgemeinen kein Stellenring. Wir werden zunächst zu einem anderen Ring übergehen, der sich als Stellenring erweisen wird, und dessen ZPE-Eigenschaft die ZPE-Eigenschaft von $\mathfrak{O}_{\bar{U}}$ selbst zur Folge hat.

Und zwar betrachten wir den Integritätsbereich $\mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ der $\mathfrak{p}$-ganzen Elemente aus $\mathfrak{O}_{\bar{U}}$. Jedes beliebige Element aus $\mathfrak{O}_{\bar{U}}$ läßt sich durch Multiplikation mit einem Element $\neq 0$ aus k prim zu $\mathfrak{p}$ normieren. Daraus folgt, daß $\mathfrak{O}_{\bar{U}}$ aus $\mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ durch Bildung eines Quotientenringes entsteht, und zwar gehört dazu das multiplikativ-abgeschlossene System der $\mathfrak{p}$-ganzen Elemente $\neq 0$ aus k. Da nun die Eigenschaft eines Ringes, ZPE-Ring zu sein, bei der Bildung von Quotientenringen erhalten bleibt, so genügt es also zu zeigen:

(4) $\qquad \mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ *ist ein ZPE-Ring.*

Zunächst zeigen wir, wie bereits angekündigt, daß $\mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ ein Stellenring ist. Da $\mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ nur aus $\mathfrak{p}$-ganzen Elementen besteht, so induziert der Ort $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ einen Homomorphismus. Nach (2), angewandt auf $\mathfrak{A} = \mathsf{R}$, ergibt sich, daß das Bild $(\mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}) \cdot \mathfrak{p}$ gerade gleich dem zu $\bar{U}$ gehörigen Stellenring in $\mathsf{K}\mathfrak{p}$ ist. Diejenigen Elemente aus $\mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$, welche vermöge $\mathfrak{p}$ in das maximale Ideal des Stellenringes von $\bar{U}$ übergehen, bilden ein Ideal $\mathfrak{M}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$. Dies ist das *einzige* maximale Ideal von $\mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$. In der Tat: Ist $z \in \mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ nicht in $\mathfrak{M}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ enthalten, so stellen wir z in der Form $z = a/s$ dar, wobei $a \in \mathsf{R}$, $s \in \mathsf{R}$, homogen gleichen Grades, und wobei s die Bedingungen (1) erfüllt. Wegen $w_{\mathfrak{p}}(s) = 0$ folgt $w_{\mathfrak{p}}(a) = w_{\mathfrak{p}}(z) = 0$. Weil $z\mathfrak{p}$ nicht im maximalen Ideal des Stellenringes von $\bar{U}$ enthalten ist, so ergibt sich aus der Darstellung $z\mathfrak{p} = a\mathfrak{p}/s\mathfrak{p}$, daß $a\mathfrak{p} \not\equiv 0 \bmod \bar{U}$ ist. Also erfüllt auch a die Bedingungen (1), und daher ist $1/z = s/a \in \mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$. Jedes nicht in $\mathfrak{M}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ gelegene Element aus $\mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ ist also Einheit in $\mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$, also ist $\mathfrak{M}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ das einzige maximale Ideal von $\mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$.

Um nachzuweisen, daß $\mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ ein Stellenring ist im Sinne von Krull, muß jetzt noch gezeigt werden, daß $\mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ die Noethersche Maximalbedingung für Ideale erfüllt. Dazu benutzen wir die bereits in der Überschrift zu diesem Abschnitt erwähnte Voraussetzung

$\mathfrak{p}$ *ist diskret und vom Range* 1.

Diese Voraussetzung ist nämlich bekanntlich damit gleichbedeutend, daß der Bewertungsring $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{p}$ in k die Noethersche Maximalbedindung für Ideale erfüllt. Also erfüllt auch $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}[y]$ die Noethersche Maximalbedingung. Nun besteht $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}[y]$ nach 9B, (8a) gerade aus den $\mathfrak{p}$-ganzen Elementen von R. Daher ist $\mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ gleich dem reduzierten Quotientenring von $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}[y]$ in bezug auf das multiplikativ-abgeschlossene System (1). Da nun die Gültigkeit der Noetherschen Maximalbedingung bei Bildung von reduzierten Quotientenringen erhalten bleibt, so genügt also auch $\mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ der Noetherschen Maximalbedingung.

Bevor wir an den eigentlichen Beweis von (4) gehen, beweisen wir jetzt weiter:

(5) *Der Stellenring* $\mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ *ist regulär.*

Beweis. Die Abbildung $a \to a\mathfrak{p}$ induziert in $\mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ einen Homomorphismus, den wir mit π bezeichnen. Der Kern von π enthält insbesondere das maximale Ideal $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ des Bewertungsringes $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{p}$ in k. Wir behaupten darüber hinaus, daß der π-Kern durch $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ erzeugt wird. In der Tat: Ist $z \neq 0$ ein Element des π-Kerns, so ist $w_\mathfrak{p}(z) > 0$; wir können daher ein Element $c \neq 0$ aus $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ bestimmen derart, daß $w_\mathfrak{p}(z/c) = 0$ ist (denn $\mathfrak{p}$ ist, wie wir wissen, unverzweigt in K/k). Das Element z/c ist zunächst in $\mathfrak{O}_{\bar{U}}$ enthalten; wegen $w_\mathfrak{p}(z/c) = 0$ ergibt sich aber, daß z/c sogar in $\mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ enthalten ist. Es folgt $z \in \mathfrak{m}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{O}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$.

Nun benutzen wir die Tatsache, daß $\mathfrak{p}$ diskret und vom Rang 1 ist. Demzufolge wird $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ durch ein einziges Element erzeugt, nämlich durch ein Primelement für $\mathfrak{p}$. Daraus ergibt sich nach dem oben Gesagten: *Der Kern von* π *ist ein Hauptideal.*

Andererseits betrachten wir das Bild von π. Dieses ist, wie bereits oben erwähnt, gleich dem zu $\bar{U}$ in $\mathsf{K}\mathfrak{p}$ gehörigen Stellenring $\mathfrak{O}_{\bar{U}}\mathfrak{p}$. Da nun voraussetzungsgemäß $V\mathfrak{p}$ konservativ ist, so ist dieser Stellenring regulär (hier wird noch nicht die Konservativität von $V\mathfrak{p}$ voll ausgenutzt, sondern nur die Singularitätenfreiheit von $V\mathfrak{p}$ über $\mathsf{k}\mathfrak{p}$). *Das Bild von* π *ist also ein regulärer Stellenring.*

Zusammengenommen ergibt sich, daß die Behauptung (5) eine unmittelbare Folge aus dem folgenden allgemeinen Resultat über Stellenringe ist:

Lemma 1. *Es sei* $\mathfrak{O}$ *ein nullteilerfreier Stellenring. Es gebe einen Homomorphismus* π *von* $\mathfrak{O}$, *dessen Kern ein Hauptideal* $\neq 0$ *und dessen Bild ein regulärer Stellenring ist. Dann ist* $\mathfrak{O}$ *regulär.*

Beweis. Sei $\dim(\mathfrak{O})$ die idealtheoretische Dimension von $\mathfrak{O}$. Dann gilt zunächst $\dim(\mathfrak{O}) \geqq \dim(\mathfrak{O}\pi)$. Andererseits betrachten wir die Minimalanzahl $m(\mathfrak{O})$ der Erzeugenden des maximalen Ideals $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{O}$. Nach einem allgemeinen Satz von Krull [6] gilt $\dim(\mathfrak{O}) \leqq m(\mathfrak{O})$, und die Gleichheit gilt hier genau dann, wenn $\mathfrak{O}$ regulär ist. Wir schätzen nun $m(\mathfrak{O})$ auf die folgende Weise ab:

Sei $q_1\pi, \ldots, q_s\pi$ ein minimales Erzeugendensystem des maximalen Ideals $\mathfrak{M}\pi$ von $\mathfrak{O}\pi$; dabei ist $s = m(\mathfrak{O}\pi)$. Die q_i erzeugen dann $\mathfrak{M}$ modulo dem Kern von π. Ist daher $t \neq 0$ ein Element, welches den Kern von π erzeugt, so ist $q_1, \ldots, q_s, t$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{M}$. Es ergibt sich daraus $m(\mathfrak{O}) \leqq 1 + m(\mathfrak{O}\pi) = 1 + \dim(\mathfrak{O}\pi)$; letzteres, weil $\mathfrak{O}\pi$ voraussetzungsgemäß regulär ist.

Zusammengenommen erhalten wir also

$$\dim(\mathfrak{D}\pi) \leqq \dim(\mathfrak{D}) \leqq m(\mathfrak{D}) \leqq 1 + \dim(\mathfrak{D}\pi).$$

Hierbei ist $\dim(\mathfrak{D}) \neq \dim(\mathfrak{D}\pi)$, denn sonst wäre π wegen der Nullteilerfreiheit von $\mathfrak{D}$ sogar ein Isomorphismus, und der Kern von π wäre gleich 0, entgegen der Voraussetzung. Es ergibt sich also

$$\dim(\mathfrak{D}) = m(\mathfrak{D}) = 1 + \dim(\mathfrak{D}\pi). \tag{6}$$

Die erste dieser Gleichungen besagt, daß $\mathfrak{D}$ regulär ist. Das war zu zeigen.

Für eine spätere Anwendung vermerken wir noch die Tatsache, daß $q_1, q_2, \ldots, q_s, t$ eine minimale Basis von $\mathfrak{M}$ ist, wie es sich aus dem obigen Beweis ergeben hat. Daraus folgt $t \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{M}^2$. Hierbei ist t eine beliebige Erzeugende des Kerns von π; nach Obigem können wir also $t = t_\mathfrak{p}$ gleich einem Primelement zu $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ setzen. Also folgt:

(7) *Ist $t_\mathfrak{p}$ ein Primelement zu $\mathfrak{p}$ aus k, so gilt*

$$t_\mathfrak{p} \equiv 0 \bmod \mathfrak{M}_{\bar{U},\mathfrak{p}}, \quad \textit{aber } t_\mathfrak{p} \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{M}^2_{\bar{U},\mathfrak{p}}.$$

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen gehen wir jetzt an den

Beweis von (4). Es besteht die Vermutung, daß *jeder* reguläre Stellenring ein ZPE-Ring ist. Sollte sich diese Vermutung als richtig erweisen, so ist also (4) eine unmittelbare Folge aus (5), und zwar *unter alleiniger Voraussetzung der Singularitätenfreiheit von V modulo $\mathfrak{p}$. Die* Konservativität von $V\mathfrak{p}$ wird dann also gar nicht an dieser Stelle benutzt. — Auf dem gegenwärtigen Stande der Erkenntnis ist es jedoch nicht möglich, aus (5) allgemein auf (4) zu schließen. Nur in den folgenden Fällen ist eine solche Schlußweise heute bereits auf Grund der einschlägigen Sätze über Stellenringe möglich:

(i) *Falls* $\dim V = 1$, *und also auch* $\dim V\mathfrak{p} = 1$.

In diesem Falle gilt nämlich für den Stellenring $\mathfrak{D}_{\bar{U}}\mathfrak{p}$ einer jeden irreduziblen Teilmannigfaltigkeit $\bar{U}$ von $V\mathfrak{p}$ die Relation $\dim \mathfrak{D}_{\bar{U}}\mathfrak{p} \leqq \dim V\mathfrak{p} = 1$. Nach (6) folgt hieraus $\dim \mathfrak{D}_{\bar{U},\mathfrak{p}} \leqq 2$. Bekanntlich ist nun jeder reguläre Stellenring der Dimension $\leqq 2$ ein ZPE-Ring; vgl. dazu Krull [7] S. 238, Satz 9. Ein anderer Beweis befindet sich bei Serre [18] S. 180, Remarque 2). Siehe auch Samuel [14] S. 61, 2°.

(ii) *Falls* $\operatorname{Char} \mathsf{k} = \operatorname{Char} \mathsf{k}\mathfrak{p}$.

In diesem Falle ist nämlich auch die Charakteristik des Stellenringes $\mathfrak{D}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ gleich der Charakteristik seines Restklassenkörpers. Im charakteristikgleichen Falle weiß man nun, daß jeder reguläre Stellenring ein ZPE-Ring ist; vgl. dazu Krull [7] S. 236, Satz 8, in Verbindung mit Cohen [2] S. 94, Th. 3.

(iii) *Falls* $\operatorname{Char} \mathsf{k}\mathfrak{p} = p > \operatorname{Char} \mathsf{k} = 0$, *und falls außerdem die Verzweigungsordnung von $\mathfrak{p}$ nicht durch die Charakteristik p seines Restklassenkörpers teilbar ist.*

Es gilt dann nämlich eine Darstellung $p = ut_\mathfrak{p}^e$ mit einer Einheit u aus $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, wobei e die Verzweigungsordnung von $\mathfrak{p}$ ist. Dabei gilt für das Primelement $t_\mathfrak{p}$ die Relation (7). Wegen $e \not\equiv 0 \bmod p$ folgt daraus aus einem Satz von Cohen, daß sich die vollständige Hülle von $\mathfrak{D}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ als ein freier Potenzreihenring über einem Bewertungsring darstellen läßt ([2] S. 93, Cor.). Diese vollständige Hülle ist daher ein ZPE-Ring ([2] S. 94, Fußnote). Also ist auch $\mathfrak{D}_{\bar{U},\mathfrak{p}}$ ein ZPE-Ring ([7] S. 236, Satz 8).

Zusammenfassend können wir feststellen:

Sei $\mathfrak{p}$ diskret und vom Range 1. Falls dann einer der Fälle (i), (ii) *oder* (iii) *vorliegt, so gelten die Reduktionssätze und damit auch die Sätze* II, III *bereits unter alleiniger Voraussetzung der Sigularitätenfreiheit von V modulo $\mathfrak{p}$.*

Jetzt behandeln wir den allgemeinen Fall. Wir machen dabei die folgende, bereits in der Überschrift zu diesem Abschnitt erwähnte zusätzliche Voraussetzung:

Der Restklassenkörper $\mathfrak{k}\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{p}$ *sei vollkommen.*

Zur Abkürzung schreiben wir $\mathfrak{O}$ an Stelle von $\mathfrak{O}_{\bar{v},\mathfrak{p}}$ und $\mathfrak{o}$ an Stelle von $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$; die maximalen Ideale seien entsprechend mit $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{m}$ bezeichnet. Die Behauptung (4) ergibt sich dann im Hinblick auf (5) und (7) aus dem folgenden allgemeinen Satz über Stellenringe:

Lemma 2. *Es sei* $\mathfrak{O}$ *ein regulärer Stellenring. Es gebe in* $\mathfrak{O}$ *einen diskreten Bewertungsring* $\mathfrak{o}$ *mit vollkommenem Restklassenkörper. Gilt dann für ein Primelement* t *von* $\mathfrak{o}$ *die Relation* $t \equiv 0 \bmod \mathfrak{M}$, $t \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{M}^2$, *so ist* $\mathfrak{O}$ *ein ZPE-Ring.*

Beweis. Nach bereits zitierten Sätzen von Krull und Cohen genügt es zu zeigen, daß die vollständige Hülle $\hat{\mathfrak{O}}$ von $\mathfrak{O}$ sich als ein freier Potenzreihenring über einem diskreten Bewertungsring (im charakteristikungleichen Falle) bzw. über einem Körper (im charakteristikgleichen Falle) darstellen läßt. Dabei können wir uns von vornherein auf den charakteristikungleichen Fall beschränken, weil das im charakteristikgleichen Falle stets der Fall ist (vgl. Fall (ii) oben).

Da auch für $\hat{\mathfrak{O}}$ die in Lemma 2 angegebenen Voraussetzungen gelten, so können wir von vornherein annehmen, daß $\mathfrak{O} = \hat{\mathfrak{O}}$ selbst vollständig ist. Dann ist die vollständige Hülle $\hat{\mathfrak{o}}$ von $\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{O}$ enthalten (vgl. [2] S. 65, Th. 6). Wir können also von vornherein annehmen, daß auch $\mathfrak{o} = \hat{\mathfrak{o}}$ vollständig ist.

Nach der allgemeinen Strukturtheorie der vollständigen Bewertungsringe existiert in $\mathfrak{o}$ ein unverzweigter vollständiger Teilring $\mathfrak{o}_0$ mit demselben Restklassenkörper wie $\mathfrak{o}$. Da $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ als vollkommen vorausgesetzt wurde, so ist $\mathfrak{o}_0$ *eindeutig bestimmt*; vgl. z. B. Cohen [2] S. 84, Theorem 13. Nach demselben Satz ist $\mathfrak{o}_0$ in jedem unverzweigten, vollständigen Bewertungsring $\mathfrak{o}'$ aus $\mathfrak{O}$ enthalten, dessen Restklassenkörper gleich $\mathfrak{O}/\mathfrak{M}$ ist. Daß es ein solches $\mathfrak{o}'$ gibt, wurde ebenfalls von Cohen bewiesen; vgl. [2] S. 79, Theorem 11. Wir denken uns im folgenden $\mathfrak{o}'$ irgendwie fest gewählt (wenn $\mathfrak{O}/\mathfrak{M}$ vollkommen ist, so ist $\mathfrak{o}'$ eindeutig bestimmt).

Das Primelement t aus $\mathfrak{o}$ genügt einer Eisensteinschen Gleichung e-ten Grades mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}_0$. Diese Koeffizienten liegen wegen $\mathfrak{o}_0 < \mathfrak{o}'$ insbesondere in $\mathfrak{o}'$. Daher ist $\mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}'[t]$ ein vollständiger, diskreter Bewertungsring von derselben Verzweigungsordnung e wie $\mathfrak{o}$. Er besitzt t als Primelement.

Zufolge der Voraussetzung über t ist t in einer Minimalbasis $t, q_2, \ldots, q_s$ von $\mathfrak{O}$ enthalten. Wir betrachten den Ring

$$\mathfrak{O}^* = \mathfrak{o}^*[[q_2, \ldots, q_s]]$$

der in $\mathfrak{O}$ konvergenten Potenzreihen in den q_i mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}^*$. Dies ist ein in $\mathfrak{O}$ enthaltener vollständiger Stellenring, dessen Restklassenkörper gleich $\mathfrak{O}/\mathfrak{M}$ ist (denn $\mathfrak{O}^*$ enthält $\mathfrak{o}'$), und der eine Basis von $\mathfrak{M}$ enthält. Folglich gilt nach Cohen ([2] S. 70, Corollary)

$$\mathfrak{O} = \mathfrak{O}^*.$$

Insbesondere ist also $\mathfrak{O}^*$ regulär von derselben Dimension s wie $\mathfrak{O}$, und die Elemente $t, q_2, \ldots, q_s$ bilden ein minimales Erzeugendensystem des maximalen Ideals von $\mathfrak{O}^*$. Daraus folgt, daß die Elemente $q_2, \ldots, q_s$ analytisch unabhängig sind über $\mathfrak{o}^*$, d. h. $\mathfrak{O}^*$ ist gleich dem *freien* Potenzreihenring in $q_2, \ldots, q_s$ über $\mathfrak{o}^*$. Das war zu zeigen.

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnitts folgendermaßen zusammen:

Sei $\mathfrak{p}$ *diskret vom Rang* 1 *mit vollkommenem Restklassenkörper* $\mathsf{k}\mathfrak{p}$. *Ist dann* V *singularitätenfrei modulo* $\mathfrak{p}$, *so gelten die beiden Reduktionssätze und also auch die Sätze* II *und* III.

15. Ergänzung für unvollkommene Restklassenkörper. Allgemeine Bemerkungen über die Vertauschbarkeit von Konstantenreduktionen und Konstantenerweiterungen. Wir werden versuchen, den Reduktionssatz bei unvollkommenem Restklassenkörper durch eine geeignete Konstantenerweiterung auf den vollkommenen Fall zurückzuführen. Wir benutzen diese Gelegenheit, um zunächst einige allgemeine Bemerkungen über das Verhalten der Vielfachenideale und der Divisoren bei Konstantenerweiterungen zu machen.

Sei dazu k' ein Erweiterungskörper von k mit der zugehörigen Konstantenerweiterung $V\mathsf{k}'$ von V. Vorausgesetzt werde, daß V absolut irreduzibel ist im Sinne der Definition in Abschnitt 13. Diese Voraussetzung bedeutet bekanntlich, daß k' und der Funktionenkörper K von V linear disjunkt sind über k (wenn man k' und K beide als Teilkörper eines gemeinsamen Oberkörpers $\mathsf{K}\mathsf{k}'$ auffaßt). Daraus folgt, daß auch k' und K^* linear disjunkt sind über k.

Der Funktionenkörper von $V\mathsf{k}'$ ist gleich $\mathsf{K}\mathsf{k}'$. Der homogene Koordinatenring eines allgemeinen Punktes von $V\mathsf{k}'$ ist gleich $\mathsf{R}\mathsf{k}' = \mathsf{k}'[y]$. Der zugehörige Quotientenkörper ist gleich $\mathsf{K}^*\mathsf{k}'$[12]).

Es sei $\mathfrak{A}$ ein graduiertes R-Ideal. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}\mathsf{k}'$ das von $\mathfrak{A}$ erzeugte $\mathsf{R}\mathsf{k}'$-Ideal. Dies ist graduiert, und für seine homogenen Komponenten gilt offenbar

$$(\mathfrak{A}\mathsf{k}')_\nu = \mathfrak{A}_\nu\mathsf{k}'.$$

Da k' und K^* linear disjunkt sind über k, so zeigt man leicht

$$\mathfrak{A}\mathsf{k}' \frown \mathsf{K}^* = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}_\nu\mathsf{k}' \frown \mathsf{K}^* = \mathfrak{A}_\nu.$$

Hieraus ergibt sich insbesondere:

(1) *Zwei graduierte* R-*Ideale* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *sind genau dann wesentlich gleich, wenn ihre Erweiterungsideale* $\mathfrak{A}\mathsf{k}'$, $\mathfrak{B}\mathsf{k}'$ *wesentlich gleich sind.*

Jetzt wollen wir das Verhalten der Divisoren und ihrer Vielfachenideale untersuchen. Dazu haben wir natürlich vorauszusetzen, daß V absolut irreduzibel und absolut ganzabgeschlossen (d. h. $V\mathsf{k}'$ ganzabgeschlossen für jeden Erweiterungskörper k' von k) ist. Jeder Divisor A von V bestimmt dann in geläufiger Weise einen Divisor von $V\mathsf{k}'$, den wir hier mit $A\mathsf{k}'$ bezeichnen. Er ist dadurch bestimmt, daß für jedes homogene Element $a \neq 0$ aus K^* die Relation

$$w_P(a) \geqq w_P(A) \qquad \text{für alle } P$$

gleichbedeutend ist mit

$$w_{P'}(a) \geqq w_{P'}(A\mathsf{k}') \qquad \text{für alle } P'.$$

(Dabei durchläuft P (bzw. P') alle Primdivisoren von V (bzw. von $V\mathsf{k}'$).)

(2) *Ist* $\mathfrak{A}$ *ein Vielfachenideal von* A, *so ist* $\mathfrak{A}\mathsf{k}'$ *ein Vielfachenideal von* $A\mathsf{k}'$.

Beweis. Wir dürfen $\mathfrak{A}$ durch ein zu $\mathfrak{A}$ wesentlich gleiches Ideal ersetzen. Nach 11, Lemma 3 dürfen wir daher annehmen, daß die Elemente $a \in \mathfrak{A}_\nu$ durch die Relation $w_P(a) \geqq w_P(A)$ für alle P gekennzeichnet sind. Es ergibt sich daraus, daß die Elemente

[12]) In dieser Bezeichnungsweise liegt eine kleine Inkonsequenz insofern, als $\mathsf{K}^*\mathsf{k}'$ den von K^* und k' erzeugten *Körper* bedeutet, während $\mathsf{R}\mathsf{k}'$ den von R und k' erzeugten *Ring* bedeutet. Das führt jedoch hier nicht zu Mißverständnissen.

a' aus $\mathfrak{A}_\nu \mathsf{k}'$ die Eigenschaft $w_{P'}(a') \geqq w_{P'}(A\mathsf{k}')$ für alle P' besitzen. Nach 11, Lemma 3 ist zu zeigen, daß umgekehrt jedes homogene Element ν-ten Grades aus $\mathsf{K}^*\mathsf{k}'$ mit dieser Eigenschaft zu $\mathfrak{A}_\nu \mathsf{k}'$ gehört. Sei dazu t ein homogenes Element aus K^* mit der Eigenschaft

$$(3) \qquad w_P(t) \geqq -w_P(A) \qquad \text{für alle } P.$$

Es gilt dann $w_{P'}(ta') \geqq 0$ für alle P'. Besitzt daher ta' hinreichend hohen Grad, so folgt daraus, daß $ta' \in \mathsf{R}\mathsf{k}'$ gilt (denn $\mathsf{R}\mathsf{k}'$ ist ein Vielfachenideal des Nulldivisors von $V\mathsf{k}'$). Ist daher $\{c_i'\}$ eine vorgegebene k-Basis von k', so gibt es eine Darstellung der Form $ta' = \sum_i u_i c_i'$, wobei die hierdurch eindeutig bestimmten Koeffizienten u_i in R liegen. Durch Division mit t erhalten wir eine Darstellung

$$a' = \sum_i a_i c_i'$$

mit eindeutig bestimmten $a_i \in \mathsf{K}^*$, welche konstruktionsgemäß folgende Eigenschaft besitzen: Für jedes homogene Element $t \in \mathsf{K}^*$ hinreichend hohen Grades, für welches (3) gilt, folgt $ta_i \in \mathsf{R}$. Insbesondere ist also $w_P(ta_i) \geqq 0$ für alle P. Nach 11, (11) schließen wir daraus $w_P(a_i) \geqq w_P(A)$, also $a_i \in \mathfrak{A}$. Das war zu zeigen.

Als eine Art Umkehrung zu (2) gilt:

(2a) *Sei $\mathfrak{A}$ ein graduiertes R-Ideal. Ist dann $\mathfrak{A}\mathsf{k}'$ ein Vielfachenideal eines $V\mathsf{k}'$-Divisors, so ist $\mathfrak{A}$ ein Vielfachenideal eines V-Divisors.*

Beweis. Sei $\mathfrak{A}\mathsf{k}'$ Vielfachenideal von A'. Da $\mathfrak{A}\mathsf{k}'$ durch $\mathfrak{A}$ erzeugt wird, so ergibt sich aus 11, (11), daß

$$w_{P'}(A') = \operatorname*{Min}_{a \in \mathfrak{A}} w_{P'}(a)$$

für alle Primdivisoren P' von $V\mathsf{k}'$ gilt. Hieraus schließen wir wegen $\mathfrak{A} < \mathsf{K}^*$, daß A' die Konstantenerweiterung eines gewissen Divisors A von V ist, also $A' = A\mathsf{k}'$. Bedeutet $\overline{\mathfrak{A}}$ ein Vielfachenideal von A, so sind folglich $\overline{\mathfrak{A}}\mathsf{k}'$ und $\mathfrak{A}\mathsf{k}'$ wesentlich gleich. Nach (1) folgt daraus, daß $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{A}$ wesentlich gleich sind. Also ist $\mathfrak{A}$ ein Vielfachenideal von A. Das war zu zeigen.

Wir vermerken noch die Multiplikationsformel $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot \mathsf{k}' = \mathfrak{A}\mathsf{k}' \cdot \mathfrak{B}\mathsf{k}'$ für irgendzwei graduierte R-Ideale $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Diese Formel ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen. In Verbindung mit (1) ergibt sich daraus unmittelbar:

(4) *Es seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{C}$ graduierte R-Ideale. Genau dann ist das Produkt $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ wesentlich gleich zu $\mathfrak{C}$, wenn $\mathfrak{A}\mathsf{k}' \cdot \mathfrak{B}\mathsf{k}'$ wesentlich gleich zu $\mathfrak{C}\mathsf{k}'$ ist.*

Jetzt untersuchen wir die Beziehungen zwischen Konstantenerweiterungen und Konstantenreduktionen. Sei dazu $\mathfrak{p}'$ eine Fortsetzung von $\mathfrak{p}$ auf k'. Vorausgesetzt werde, daß V konservativ ist modulo $\mathfrak{p}$. Nach 13, Lemma 1 ist dann V konservativ; außerdem ergibt sich aus 13, (2) die Relation

$$V\mathsf{k}' \cdot \mathfrak{p} = V\mathfrak{p} \cdot \mathsf{k}'\mathfrak{p}'.$$

Wir können dies in Worten so ausdrücken: „Die Operationen Konstantenerweiterung und Konstantenreduktion sind miteinander vertauschbar".

Jetzt sei $\mathfrak{A}$ ein graduiertes R-Ideal. Es gilt

$$(5) \qquad \mathfrak{A}\mathsf{k}' \cdot \mathfrak{p}' = \mathfrak{A}\mathfrak{p} \cdot \mathsf{k}'\mathfrak{p}'.$$

Der Beweis ergibt sich ganz genau so wie der Beweis von 13, (2) für I; er braucht daher hier nicht wiederholt zu werden.

Wäre der 1. Reduktionssatz bereits bewiesen, so ergäbe sich aus (5), angewandt auf das Vielfachenideal $\mathfrak{A}$ eines V-Divisors A, die entsprechende Formel für A, nämlich

$$A\mathfrak{k}' \cdot \mathfrak{p}' = A\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{k}'\mathfrak{p}'.$$

Nehmen wir nunmehr die Aussagen (1), (2), (2a), (4), (5) zusammen, so ergibt sich unmittelbar, daß die folgende Aussage richtig ist:

Gelten die beiden Reduktionssätze für $V\mathfrak{k}'$ modulo $\mathfrak{p}'$, so gelten sie auch für V modulo $\mathfrak{p}$.

Mit anderen Worten: Zum Beweis der Reduktionssätze kann eine beliebige Konstantenerweiterung vorgenommen werden, wobei dann $\mathfrak{p}$ durch eine Fortsetzung $\mathfrak{p}'$ zu ersetzen ist.

Wie müssen nun $\mathfrak{k}', \mathfrak{p}'$ gewählt werden, damit der Beweis der Reduktionssätze durch die obige Methode zurückgeführt wird auf den Fall eines vollkommenen Restklassenkörpers? Offenbar genügt es, $\mathfrak{k}', \mathfrak{p}'$ so zu wählen, daß $\mathfrak{k}'\mathfrak{p}'$ gleich der vollkommenen Hülle von $\mathfrak{k}\mathfrak{p}$ ist. Um sicher zu sein, daß $\mathfrak{p}'$ gleichzeitig mit $\mathfrak{p}$ diskret und vom Range 1 ist (nur dieser Fall wurde im vorigen Abschnitt behandelt), haben wir zusätzlich noch zu verlangen, daß $\mathfrak{p}'$ unverzweigt ist über $\mathfrak{p}$. Eine solche Wahl von $\mathfrak{k}', \mathfrak{p}'$ ist nun stets möglich, denn es gilt bekanntlich der folgende allgemeine Satz über Bewertungsfortsetzungen:

Sei $\mathfrak{k}$ ein Körper und $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor von $\mathfrak{k}$. Sei $\bar{\mathfrak{k}}$ ein vorgegebener Erweiterungskörper von $\mathfrak{k}\mathfrak{p}$. Dann gibt es stets einen Erweiterungskörper $\mathfrak{k}'$ von $\mathfrak{k}$ und eine träge Fortsetzung $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{k}'$ derart, daß $\mathfrak{k}'\mathfrak{p}' = \bar{\mathfrak{k}}$.

Zum Beweis vgl. etwa Schilling [15] S. 218, Lemma 19 (die dort gemachte Separabilitätsvoraussetzung ist unnötig).

Zusammenfassend können wir im Hinblick auf die Ausführungen in diesem und im vorangegangenen Abschnitt feststellen:

Ist $\mathfrak{p}$ diskret und vom Rang 1, so gelten die beiden Reduktionssätze unter der Voraussetzung der Konservativität von V modulo $\mathfrak{p}$.

16. Beweis der Reduktionssätze für einen diskreten Primdivisor beliebigen endlichen Ranges. Allgemeines über die Zusammensetzung von Konstantenreduktionen. Sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Primdivisor von $\mathfrak{k}$, der eine Aufspaltung

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'\mathfrak{p}'' \tag{1}$$

zuläßt; das soll genauer bedeuten $a\mathfrak{p} = a\mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{p}''$ für $a \in \mathfrak{k}$. Also ist $\mathfrak{p}'$ ein Primdivisor von $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{p}''$ ein Primdivisor von $\mathfrak{k}\mathfrak{p}'$. Für den Rang von $\mathfrak{p}$ gilt die Beziehung

$$\text{Rang}(\mathfrak{p}) = \text{Rang}(\mathfrak{p}') + \text{Rang}(\mathfrak{p}''). \tag{2}$$

Die Aufspaltung heißt *nichttrivial*, wenn keiner der Ränge von $\mathfrak{p}'$ oder $\mathfrak{p}''$ gleich 0 ist; eine nichttriviale Aufspaltung existiert genau dann, wenn $\text{Rang}(\mathfrak{p}) > 1$ ist. Vgl. hierzu etwa Schilling [15] S. 15—18.

Für das definierende Relationenideal $\mathfrak{l}(V)$ ergibt sich die Relation

$$\mathfrak{l}(V)\,\mathfrak{p} = \mathfrak{l}(V)\,\mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{p}''.$$

Ist daher V irreduzibel modulo $\mathfrak{p}$ (ist also $\mathfrak{l}(V)\,\mathfrak{p}$ ein Primideal), so ergibt sich aus Abschnitt 5, daß auch $\mathfrak{l}(V)\,\mathfrak{p}'$ ein Primideal ist. Folglich ist V irreduzibel modulo $\mathfrak{p}'$, und daraus folgt $\mathfrak{l}(V)\,\mathfrak{p}' = \mathfrak{l}(V\mathfrak{p}')$. Jetzt ergibt sich weiter, daß $V\mathfrak{p}'$ irreduzibel ist modulo $\mathfrak{p}''$, und daß daher gilt

$$\mathfrak{l}(V\mathfrak{p}) = \mathfrak{l}(V\mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{p}'').$$

Daraus folgt insbesondere

$$V\mathfrak{p} = V\mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{p}''.$$

In Worten können wir dieses Ergebnis so beschreiben: „Die Hintereinanderausführung zweier Konstantenreduktionen ist wieder eine Konstantenreduktion."

Nach dem Trägheitssatz kann $\mathfrak{p}'$ auch als Primdivisor des Funktionenkörpers K von V aufgefaßt werden, und $\mathsf{K}\mathfrak{p}'$ ist der Funktionenkörper von $V\mathfrak{p}'$. Wenden wir nunmehr den Trägheitssatz auf $V\mathfrak{p}'$ modulo $\mathfrak{p}''$ an, so ergibt sich, daß $\mathfrak{p}''$ auch als Primdivisor von $\mathsf{K}\mathfrak{p}'$ aufgefaßt werden kann. Auf Grund der Eindeutigkeitsaussage des Trägheitssatzes folgt, daß *die Aufspaltung* (1) *auch dann gilt, wenn man* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ *als Primdivisoren von* K *und* $\mathfrak{p}''$ *als Primdivisor von* $\mathsf{K}\mathfrak{p}'$ *auffaßt.* Dasselbe gilt nach den Ergänzungssätzen zum Trägheitssatz auch dann, wenn man hierin K durch K^* ersetzt.

Ist daher $\mathfrak{A}$ eine beliebige Teilmenge aus K^*, so ergibt sich die Formel

$$\mathfrak{A}\mathfrak{p} = \mathfrak{A}\mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{p}''. \tag{3}$$

Insbesondere gilt dies also für ein graduiertes R-Ideal. Wäre der 1. Reduktionssatz bereits allgemein bewiesen, so ergäbe sich hieraus, angewandt auf das Vielfachenideal eines Divisors A von V, die Formel

$$A\mathfrak{p} = A\mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{p}''.$$

Allerdings ist im Augenblick der 1. Reduktionssatz noch nicht bewiesen. Jedenfalls ergibt sich aus (3) unmittelbar:

Gelten die Reduktionssätze für V modulo $\mathfrak{p}'$ und für $V\mathfrak{p}'$ modulo $\mathfrak{p}''$, so gelten sie auch für V modulo $\mathfrak{p}$.

Mit anderen Worten: Zum Beweis der Reduktionssätze kann $\mathfrak{p}$ beliebig aufgespalten werden; es genügt dann, den Reduktionssatz für die einzelnen Faktoren zu beweisen. Man bemerke dazu, daß sich die Voraussetzung der Konservativität von V modulo $\mathfrak{p}$ bei einer solchen Aufspaltung überträgt auf die Konservativität von V modulo $\mathfrak{p}'$ und von $V\mathfrak{p}'$ modulo $\mathfrak{p}''$. Das ergibt sich unmittelbar aus 11, Lemma 1.

Ist nun $\mathfrak{p}$ diskret von einem endlichen Rang > 1, so besitzt $\mathfrak{p}$ eine Aufspaltung, in der die Faktoren $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ je einen kleineren Rang als $\mathfrak{p}$ besitzen. *Vermöge vollständiger Induktion überträgt sich also die Gültigkeit der Reduktionssätze für diskrete Primdivisoren vom Range* 1 *auf diskrete Primdivisoren beliebigen positiven Ranges.*

Selbstverständlich gelten die Reduktionssätze auch für einen Primdivisor vom Range 0, denn der zu einem solchen Primdivisor gehörige Ort ist ja ein Isomorphismus.

Damit sind die Reduktionssätze bewiesen für diskrete Primdivisoren beliebigen endlichen Ranges.

Bemerkung. Liegt für $\mathfrak{p}$ der charakteristikgleiche Fall vor, so auch für jeden der Faktoren $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$. Aus 14, (ii) folgt in diesem Falle, daß man mit der alleinigen Voraussetzung der *Singularitätenfreiheit* von V modulo $\mathfrak{p}$ auskommt. Die schärfere Voraussetzung der Konservativität ist in diesem Falle also gar nicht notwendig. Dasselbe gilt im charakteristikungleichen Falle für eine *Kurve* (dim $V = 1$). Dasselbe gilt auch im charakteristikungleichen Falle, falls derjenige eindeutig bestimmte Faktor von $\mathfrak{p}$, der vom Range 1 ist und für den der charakteristikungleiche Fall gilt, eine nicht durch die Charakteristik des Restklassenkörpers teilbare Verzweigungsordnung besitzt.

17. Beweis der Reduktionssätze für den Fall eines endlich-erzeugbaren Grundkörpers. Es sei jetzt $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Primdivisor von k. Es sei $\mathfrak{A}$ ein Vielfachenideal von V, für das der 1. Reduktionssatz bewiesen werden soll. Wir versuchen nun die folgendeAufgabe zu lösen:

Gesucht ist ein diskreter Primdivisor $\mathfrak{p}'$ *von* k, *dessen Restkörper* $\mathsf{k}\mathfrak{p}'$ *in einem Erweiterungskörper* $\bar{\mathsf{k}}$ *von* $\mathsf{k}\mathfrak{p}$ *liegt, und für den die beiden Relationen*

$$\mathsf{I}\mathfrak{p}' \cdot \bar{\mathsf{k}} = \mathsf{I}\mathfrak{p} \cdot \bar{\mathsf{k}} \tag{1}$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{p}' \cdot \bar{\mathsf{k}} = \mathfrak{A}\mathfrak{p} \cdot \bar{\mathsf{k}} \tag{2}$$

gelten.

Dabei haben wir zur Abkürzung, wie stets, I an Stelle von $\mathsf{I}(V)$ geschrieben. Aus (1) ergibt sich, weil $\mathsf{I}\mathfrak{p} \cdot \bar{\mathsf{k}}$ voraussetzungsgemäß ein Primideal ist, daß auch $\mathsf{I}\mathfrak{p}' \cdot \bar{\mathsf{k}}$ ein Primideal ist. Daher ist auch $\mathsf{I}\mathfrak{p}'$ ein Primideal, denn es gilt die leicht zu beweisende Durchschnittsrelation $\mathsf{I}\mathfrak{p}' = (\mathsf{I}\mathfrak{p}' \cdot \bar{\mathsf{k}}) \cap \mathsf{S}\mathfrak{p}'$. Es ergibt sich also aus (1), daß V irreduzibel ist modulo $\mathfrak{p}'$; ferner folgt

$$V\mathfrak{p}' \cdot \bar{\mathsf{k}} = V\mathfrak{p} \cdot \bar{\mathsf{k}}.$$

Insbesondere folgt, daß für V modulo $\mathfrak{p}'$ auch der Trägheitssatz und seine Ergänzungssätze gelten. Daher ist dann $\mathfrak{A}\mathfrak{p}'$ im Sinne der Identifikation in Abschnitt 10 wohl definiert, so daß die Bedingung (2) jedenfalls sinnvoll ist. Man beachte, daß wir nach dem 2. Ergänzungssatz (Abschnitt 10) wegen (1) die Relation

$$\mathsf{R}\mathfrak{p}' \cdot \bar{\mathsf{k}} = \mathsf{R}\mathfrak{p} \cdot \bar{\mathsf{k}}$$

haben (genauer: diese beiden Integritätsbereiche sind über $\bar{\mathsf{k}}$ isomorph und können identifiziert werden). Also sind beide Ideale in (2) jedenfalls Ideale in bezug auf denselben Integritätsbereich.

Nehmen wir nun einmal an, wir könnten die obige Aufgabe lösen. Dann ergibt sich der Beweis des 1. Reduktionssatzes für $\mathfrak{A}$ folgendermaßen:

Wegen der Diskretheit von $\mathfrak{p}'$ wissen wir aus den Ausführungen des vorangegangenen Abschnitts, daß $\mathfrak{A}\mathfrak{p}'$ ein Vielfachenideal eines Divisors von $V\mathfrak{p}'$ ist. Also ist $\mathfrak{A}\mathfrak{p}' \cdot \bar{\mathsf{k}}$ nach 15, (2) ein Vielfachenideal eines Divisors von $V\mathfrak{p}' \cdot \bar{\mathsf{k}}$. Wegen (1) und (2) ist daher $\mathfrak{A}\mathfrak{p} \cdot \bar{\mathsf{k}}$ ein Vielfachenideal eines Divisors von $V\mathfrak{p} \cdot \bar{\mathsf{k}}$. Also ist $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$ nach 15, (2a) Vielfachenideal eines Divisors von $V\mathfrak{p}$.

Damit ist der 1. Reduktionssatz zurückgeführt auf die Lösung der obigen Aufgabe. Nun läßt sich auch der 2. Reduktionssatz auf eine Aufgabe desselben Typus zurückführen: Sind nämlich $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zwei Vielfachenideale von V, für welche der 2. Reduktionssatz bewiesen werden soll, so setzen wir $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, und erweitern die obige Aufgabe so, daß nicht nur (1) und (2) gelten soll, sondern auch

$$\mathfrak{B}\mathfrak{p}' \cdot \bar{\mathsf{k}} = \mathfrak{B}\mathfrak{p} \cdot \bar{\mathsf{k}}, \qquad \mathfrak{C}\mathfrak{p}' \cdot \bar{\mathsf{k}} = \mathfrak{C}\mathfrak{p} \cdot \bar{\mathsf{k}}. \tag{3}$$

Ist diese erweiterte Aufgabe gelöst, so schließen wir folgendermaßen: Wegen der Diskretheit von $\mathfrak{p}'$ sind $\mathfrak{A}\mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{p}'$ wesentlich gleich. Nach 15, (4) folgt daraus, daß $\mathfrak{A}\mathfrak{p}'\bar{\mathsf{k}} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{p}'\bar{\mathsf{k}}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{p}'\bar{\mathsf{k}}$ wesentlich gleich sind. Wegen (2), (3) schließen wir daraus unter nochmaliger Anwendung von 15, (4), daß $\mathfrak{A}\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{p}$ wesentlich gleich sind, was zu zeigen war.

Also läuft der Beweis unserer Aufgabe auf die Lösung der folgenden allgemeinen Aufgabe zurück:

Gesucht ist ein diskreter Primdivisor $\mathfrak{p}'$ *von* k, *dessen Restkörper* $\mathsf{k}\mathfrak{p}'$ *in einem Erweiterungskörper* $\bar{\mathsf{k}}$ *von* $\mathsf{k}\mathfrak{p}$ *liegt, und für den die Relationen*

$$\mathsf{I}\mathfrak{p}' \cdot \bar{\mathsf{k}} = \mathsf{I}\mathfrak{p} \cdot \bar{\mathsf{k}}, \qquad \mathfrak{A}_i\mathfrak{p}' \cdot \bar{\mathsf{k}} = \mathfrak{A}_i\mathfrak{p} \cdot \bar{\mathsf{k}} \tag{4}$$

gelten.

Hierbei bedeuten $\mathfrak{A}_i (i = 1, \ldots, s)$ *endlich viele vorgegebene graduierte* R*-Ideale.*

Es wird sich zeigen, daß wir diese Aufgabe nur für einen endlich-erzeugbaren Körper k lösen können. Der allgemeine Fall wird dann anschließend noch eine gesonderte Betrachtung erfordern.

Zur Lösung der obigen Aufgabe beweisen wir zunächst das

Lemma 1. *Es gibt in* k *ein System* $c = \{c_1, \ldots, c_t\}$ *endlich vieler Elemente (welches nur von* I *und von* $\mathfrak{p}$ *abhängt) derart, daß die Relation* (1) *sicher für alle diejenigen* $\mathfrak{p}'$ *richtig ist, für welche* $c\mathfrak{p}' = c\mathfrak{p}$ gilt.

Beweis. Wir wählen ein System $f = \{f_1, \ldots, f_u\}$ endlich vieler homogener Polynome aus $\mathsf{S} = \mathsf{k}[x]$, welche das graduierte Ideal I erzeugen. Wir denken uns die $f_i = f_i(x)$ mit $\mathfrak{p}$-ganzen Koeffizienten gewählt, und so, daß $f\mathfrak{p}$ ein Erzeugendensystem von $\mathsf{I}\mathfrak{p}$ ist. Ist c das System der Koeffizienten der Polynome aus f, so behaupten wir, daß c unsere Forderungen erfüllt.

Gilt nämlich $c\mathfrak{p}' = c\mathfrak{p}$, so gilt $f\mathfrak{p}' = f\mathfrak{p}$. Also ist das von $f\mathfrak{p}$ erzeugte Ideal von $\mathsf{S}\mathfrak{p} \cdot \bar{\mathsf{k}}$, nämlich $\mathsf{I}\mathfrak{p} \cdot \bar{\mathsf{k}}$, enthalten in $\mathsf{I}\mathfrak{p}' \cdot \bar{\mathsf{k}}$. Um zu zeigen, daß diese beiden Ideale wirklich gleich sind, wie behauptet, genügt es daher nachzuweisen, daß für jedes ν die homogenen ν-ten Komponenten beider Ideale die gleiche Dimension besitzen, also

$$\dim_{\bar{\mathsf{k}}} \mathsf{I}_\nu \mathfrak{p} \cdot \bar{\mathsf{k}} = \dim_{\bar{\mathsf{k}}} \mathsf{I}_\nu \mathfrak{p}' \cdot \bar{\mathsf{k}}. \tag{5}$$

Nun ist einerseits

$$\dim_{\bar{\mathsf{k}}} \mathsf{I}_\nu \mathfrak{p} \cdot \bar{\mathsf{k}} = \dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{I}_\nu \mathfrak{p},$$

denn die Dimension ändert sich nicht bei Konstantenerweiterung. Andererseits ist

$$\dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{I}_\nu \mathfrak{p} = \dim_{\mathsf{k}} \mathsf{I}_\nu,$$

und zwar aus folgendem Grunde: Wie bereits im Trägheitssatz festgestellt, ist der Funktionalprimdivisor $\mathfrak{p}(x)$ *träge* über $\mathfrak{p}$. Da wir die Restbildung modulo $\mathfrak{p}(x)$ gemäß den Verabredungen in Abschnitt 5 einfach mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet haben, so ergibt sich also für jeden endlichdimensionalen k-Teilmodul M von S die Relation $\dim_{\mathsf{k}\mathfrak{p}} \mathsf{M}\mathfrak{p} = \dim_{\mathsf{k}} \mathsf{M}$. Angewandt auf $\mathsf{M} = \mathsf{I}_\nu$ ergibt das die oben behauptete Relation.

Zusammengenommen ergibt sich, daß die linke Seite in (5) gleich $\dim_{\mathsf{k}} \mathsf{I}_\nu$ ist, also gar nicht mehr von $\mathfrak{p}$ abhängt. Das ergibt die Richtigkeit von (5). Das war zu zeigen.

Lemma 2. *Es gibt zu jedem graduierten* R*-Ideal* $\mathfrak{A}$ *ein endliches Elementsystem* d *aus* k *(welches nur von* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{p}$ *abhängt) derart, daß folgendes gilt: Für einen Primdivisor* $\mathfrak{p}'$ *von* k *mit der Eigenschaft* (1) *gilt sicher dann die Relation* (2), *wenn* $d\mathfrak{p}' = d\mathfrak{p}$ *ist.*

Beweis. Aus (1) folgt, wie bereits oben gesagt, daß für V modulo $\mathfrak{p}'$ der Trägheitssatz und seine Ergänzungen gelten. Ferner haben wir $\mathsf{R}\mathfrak{p}' \cdot \bar{\mathsf{k}} = \mathsf{R}\mathfrak{p} \cdot \bar{\mathsf{k}}$, sowie $y\mathfrak{p}' = y\mathfrak{p}$. Daher können wir zum Beweis von Lemma 2 genau so vorgehen wie beim Beweis von Lemma 1, nämlich:

Wir wählen ein homogenes Erzeugendensystem f von $\mathfrak{A}$, das aus endlich vielen Elementen besteht, derart, daß $f\mathfrak{p}$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$ ist. Wir schreiben die Elemente aus f als rationale Funktionen in y und bezeichnen mit d das System der dabei auftretenden Koeffizienten. Aus $d\mathfrak{p}' = d\mathfrak{p}$ folgt dann $f\mathfrak{p}' = f\mathfrak{p}$, und hieraus ergibt sich durch dieselben Schlußweisen wie beim Beweis von Lemma 1, daß $\mathfrak{A}\mathfrak{p}' \cdot \bar{\mathsf{k}} = \mathfrak{A}\mathfrak{p} \cdot \bar{\mathsf{k}}$ ist (die dortige Bezugnahme auf die Trägheit von $\mathfrak{p}(x)$ ist hier zu ersetzen durch die Trägheit von $\mathfrak{P}^*$ nach dem Trägheitssatz). Das war zu zeigen.

Um nun die obige Aufgabe zu lösen, wählen wir ein endliches Elementsystem c gemäß Lemma 1, und für jedes $\mathfrak{A}_i$ ein endliches Elementsystem d_i gemäß Lemma 2. Insgesamt erhalten wir ein endliches Elementsystem e aus k mit der Eigenschaft, daß ein

Primdivisor $\mathfrak{p}'$ von k sicher dann die Forderungen (4) erfüllt, wenn $e\mathfrak{p}' = e\mathfrak{p}$ gibt. Wir bezeichnen mit E den von e erzeugten Integritätsbereich, und mit π den von $\mathfrak{p}$ in E induzierten Homomorphismus. Wir haben dann die folgende Aufgabe zu lösen:

Vorgegeben ist ein Körper k, *und ein endlich-erzeugbarer Integritätsbereich* E *aus* k; *ferner ist ein Homomorphismus* π *von* E *in einen Körper gegeben. Gesucht ist ein diskreter Primdivisor* $\mathfrak{p}'$ *von* k, *welcher in* E *den Homomorphismus* π *induziert.*

Würde hier nicht gefordert, daß $\mathfrak{p}'$ diskret sein soll, so wäre die Lösbarkeit dieser Aufgabe eine unmittelbare Folge aus dem bekannten allgemeinen Fortsetzungssatz für Bewertungen; vgl. [10] S. 11, Th. 1. Der Nachdruck liegt bei uns also darauf, daß $\mathfrak{p}'$ diskret sein soll.

Lösung der Aufgabe für den Fall, daß k *endlich-erzeugbar ist:*[13])

Es sei $\mathfrak{m}$ das Kernprimideal von π in E. Es genügt, $\mathfrak{p}'$ so zu konstruieren, daß für das maximale Primideal $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}'}$ des Bewertungsringes $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}'}$ gilt

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}'} \cap \mathsf{E} = \mathfrak{m}.$$

Wir sagen dann kurz: „$\mathfrak{p}'$ besitzt in E den Kern $\mathfrak{m}$"

Der *Rang* von $\mathfrak{m}$ ist definiert als die maximale Länge einer mit $\mathfrak{m}$ beginnenden, absteigenden Kette von Primidealen $\neq 0$. Da E endlich-erzeugbar ist, so ist der Rang von $\mathfrak{m}$ bekanntlich endlich. Wir können natürlich annehmen, daß der Rang von $\mathfrak{m}$ nicht gleich 0 ist (denn sonst ist $\mathfrak{m} = 0$, und wir können $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}'} = \mathsf{k}$ wählen). Wir verwenden vollständige Induktion nach dem Rang von $\mathfrak{m}$ und beginnen daher mit dem Fall

Rang $\mathfrak{m} = 1$. Sei E^* die ganzabgeschlossene Hülle von E in k. Bekanntlich ist auch E^* endlich erzeugbar (Nagata [11] S. 3, Th. 93). Es gibt ein über $\mathfrak{m}$ liegendes Primideal $\mathfrak{m}^*$ von E^*, und es gilt Rang $\mathfrak{m}^* =$ Rang $\mathfrak{m} = 1$. Da also auf E^*, $\mathfrak{m}^*$ dieselben Voraussetzungen zutreffen wie auf E, $\mathfrak{m}$, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, es sei $\mathsf{E} = \mathsf{E}^*$ ganzabgeschlossen, und also $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^*$.

Also ist $\mathfrak{m}$ ein minimales Primideal $\neq 0$ des ganzabgeschlossenen Integritätsbereiches E. Für E als endlich-erzeugbaren Integritätsbereich gilt die Noethersche Maximalbedingung. Aus der allgemeinen Theorie der Noetherschen ganzabgeschlossenen Integritätsbereiche (Theorie der „Quasigleichheit") ergibt sich daher, daß der Quotientenring von E bezüglich $\mathfrak{m}$ ein diskreter Bewertungsring vom Range 1 des Quotientenkörpers Q von E ist. Bezeichnen wir den zugehörigen Primdivisor von Q mit $\mathfrak{q}$. Falls $\mathsf{k} = \mathsf{Q}$ ist, so ist unsere Aufgabe gelöst, wenn wir $\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}$ setzen (und dies ist dann die einzige Lösung unserer Aufgabe). Im allgemeinen Falle ist $\mathsf{Q} < \mathsf{k}$, und wir haben $\mathfrak{q}$ *unter Erhaltung der Diskretheit* auf k fortzusetzen. Das geschieht so: Sei t eine Transzendenzbasis von k über Q. Wir setzen $\mathfrak{q}$ auf $\mathsf{Q}(t)$ als *Funktionalprimdivisor* $\mathfrak{q}(t)$ fort. Dann ist $\mathfrak{q}(t)$ unverzweigt über Q, besitzt also ebenfalls den Rang 1 und ist diskret. Ist dann $\mathfrak{p}'$ irgendeine Fortsetzung von $\mathfrak{q}(t)$ auf k, so ist auch $\mathfrak{p}'$ diskret: Da nämlich k über $\mathsf{Q}(t)$ endlich-algebraisch ist (denn k ist endlich-erzeugbar und über $\mathsf{Q}(t)$ vom Transzendenzgrad 0), so ergibt sich aus bekannten Sätzen der Bewertungstheorie, daß die Wertgruppe von $\mathfrak{p}'$ eine *endliche* Erweiterung der Wertgruppe von $\mathfrak{q}(t)$, also der Wertgruppe von $\mathfrak{q}$ ist. Daher ist in der Tat $\mathfrak{p}'$ zugleich mit $\mathfrak{q}$ diskret und vom Rang 1.

---

[13]) Eine andere Lösung dieser Aufgabe wurde kürzlich von *Chow* gegeben. (On the principle of degeneration in algebraic geometry; Annals of Math. 66 (1957), 70—79). Chow beweist allgemeiner den folgenden Satz: Ist R ein Noetherscher Integritätsbereich mit Quotientenkörper K, und ist $\mathfrak{m}$ ein Primideal von R, so gibt es stets einen diskreten Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K *vom Rang* 1, welcher in R den Kern $\mathfrak{m}$ besitzt.

Falls also $\mathfrak{m}$ den Rang 1 besitzt, ist unsere Aufgabe durch die obige Konstruktion gelöst. Diese Konstruktion liefert zugleich noch die folgende zusätzliche Eigenschaft von $\mathfrak{p}'$:

(6) $\mathsf{k}\mathfrak{p}'$ *ist endlich-erzeugbar.*

Denn zunächst ist E^* endlich-erzeugbar, also auch der Restklassenring $\mathsf{E}^*/\mathfrak{m}^*$. Weiter ist $\mathsf{Q}\mathfrak{q}$ gleich dem Quotientenkörper von $\mathsf{E}^*/\mathfrak{m}^*$, ist also endlich erzeugbar. Durch Fortsetzung auf $\mathsf{Q}(t)$ als Funktionalprimdivisor $\mathfrak{q}(t)$ erfährt der Restklassenkörper eine rein transzendente Erweiterung vom selben Transzendenzgrad wie $\mathsf{Q}(t)$ über Q; durch weitere Fortsetzung auf die endlich-algebraische Erweiterung k von $\mathsf{Q}(t)$ erfährt der Restklassenkörper nur eine endlich-algebraische Erweiterung. Daraus folgt zusammengenommen, daß $\mathsf{k}\mathfrak{p}'$ gemäß unserer Konstruktion in der Tat endlich-erzeugbar ist.

Nun nehmen wir an, der *Rang von* $\mathfrak{m}$ *sei* > 1, und die obige Aufgabe bereits gelöst für alle Fälle von Primidealen kleineren Ranges, mit der Zusatzeigenschaft (6). Sei $\mathfrak{n} \neq 0$ ein in $\mathfrak{m}$ enthaltenes Primideal kleineren Ranges von E. Es gibt dann nach Induktionsvoraussetzung einen diskreten Primdivisor $\mathfrak{p}_1$ von k mit dem Kern $\mathfrak{n}$ auf E derart, daß $\mathsf{k}\mathfrak{p}_1$ endlich-erzeugbar ist. Betrachten wir $\mathsf{E}\mathfrak{p}_1 = \mathsf{E}/\mathfrak{n}$, und sein Primideal $\mathfrak{m}\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{m}/\mathfrak{n}$. Wegen $\mathfrak{n} \neq 0$ besitzt $\mathfrak{m}/\mathfrak{n}$ kleineren Rang als $\mathfrak{m}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen diskreten Primdivisor $\mathfrak{p}_2$ von $\mathsf{k}\mathfrak{p}_1$ mit dem Kern $\mathfrak{m}/\mathfrak{n}$ auf $\mathsf{E}/\mathfrak{n}$, derart daß $\mathsf{k}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ endlich erzeugbar ist. Offenbar besitzt $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ den Kern $\mathfrak{m}$ auf E. Dieser Primdivisor ist diskret (als Zusammensetzung zweier diskreter Primdivisoren). Es ist $\mathsf{k}\mathfrak{p}' = \mathsf{k}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ endlich-erzeugbar.

Damit ist die obige Aufgabe für den Fall eines endlich-erzeugbaren Körpers k gelöst.

1. Bemerkung. Wie dieser Induktionsbeweis zeigt, besitzt der konstruierte Primdivisor $\mathfrak{p}'$ von k denselben Rang wie $\mathfrak{m}$.

2. Bemerkung. Der obige Beweis läßt sich auch durchführen, wenn k nicht endlich-erzeugbar ist, wenn aber k über einem Teiklörper $\varkappa$ endlich-erzeugbar ist (wenn also k ein Funktionenkörper über $\varkappa$ ist). Dann ist natürlich vorauszusetzen, daß $\varkappa$ in E enthalten ist, und E über $\varkappa$ endlich-erzeugbar ist. Unser Beweis geht dann über in den bekannten Beweis von Zariski [21], S. 499, Th. 4. Es ergibt sich daraus die Gültigkeit der Reduktionssätze unmittelbar, falls $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor von k über $\varkappa$ ist; ohne daß erst auf die nachfolgenden Zusatzüberlegungen zurückgegriffen werden muß.

Zusammenfassend können wir unser bisheriges Ergebnis folgendermaßen formulieren:

Ist k *endlich-erzeugbar, so gelten die beiden Reduktionssätze für jeden beliebigen Primdivisor* $\mathfrak{p}$ *von* k, *unter der Voraussetzung, daß* V *konservativ ist modulo* $\mathfrak{p}$.

18. Der allgemeine Fall. Nunmehr sei k beliebig (nicht notwendig endlich-erzeugbar). Wir wollen die Reduktionssätze jetzt allgemein beweisen.

Es gibt einen endlich-erzeugbaren Teilkörper k_0 von k derart, daß V aus einer über k_0 definierten Mannigfaltigkeit V_0 durch Konstantenerweiterung entsteht, also $V = V_0\mathsf{k}$. In der Tat braucht man k_0 nur so zu wählen, daß er die Koeffizienten von endlich vielen homogenen Polynomen f_i enthält, welche I erzeugen. Es gilt dann $\mathsf{I} = \mathsf{I}_0\mathsf{k}$. Sei $\mathfrak{p}_0$ der von $\mathfrak{p}$ in k_0 induzierte Primdivisor. Wählt man die f_i so, daß die $f_i\mathfrak{p}$ das Ideal $\mathsf{I}\mathfrak{p}$ erzeugen, und sorgt dafür, daß die Koeffizienten der f_i in k_0 liegen, so ergibt sich $\mathsf{I}\mathfrak{p} = \mathsf{I}_0\mathfrak{p}_0 \cdot \mathsf{k}\mathfrak{p}$. Insbesondere folgt daraus $V\mathfrak{p} = V_0\mathfrak{p}_0 \cdot \mathsf{k}\mathfrak{p}$. Ferner ergibt sich aus den Ausführungen in Abschnitt 13, daß mit V modulo $\mathfrak{p}$ auch V_0 modulo $\mathfrak{p}_0$ konservativ ist.

Ist nun ein graduiertes R-Ideal $\mathfrak{A}$ vorgegeben, für welches der 1. Reduktionssatz bewiesen werden soll, so kann man k_0 durch Adjunktion endlich vieler Elemente noch so

vergrößern, daß außerdem gilt $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \mathsf{k}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{p} = \mathfrak{A}_0\mathfrak{p}_0 \cdot \mathsf{k}\mathfrak{p}$, mit einem graduierten R_0-Ideal $\mathfrak{A}_0$. Aus den Ausführungen in Abschnitt 15 ergibt sich, daß $\mathfrak{A}$ genau dann Vielfachenideal eines Divisors von V ist, wenn $\mathfrak{A}_0$ Vielfachenideal eines Divisors von V_0 ist; entsprechendes gilt für $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{A}_0\mathfrak{p}_0$. Zusammengenommen folgt also, weil der 1. Reduktionssatz für V_0 modulo $\mathfrak{p}_0$ nach Abschnitt 17 gilt, daß er auch für V modulo $\mathfrak{p}$ gilt.

Eine entsprechende Schlußweise kann nun auch für den 2. Reduktionssatz durchgeführt werden: Soll dieser für zwei Ideale $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ bewiesen werden, so setze man $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und wähle k_0 so groß, daß die obengenannte Relation nicht nur für $\mathfrak{A}$, sondern gleichzeitig auch für $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gilt. Dann ergibt sich die Gültigkeit des Reduktionssatzes für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ modulo $\mathfrak{p}$ mit Hilfe der Resultate aus Abschnitt 15 unmittelbar aus seiner Gültigkeit für $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ modulo $\mathfrak{p}_0$. Das war zu zeigen.

Bemerkung. Die Ausführungen in den Abschnitten 16—18 zeigen die Gültigkeit des folgenden allgemeinen Prinzips: Ist ein Satz über Konstantenreduktion algebraischer Mannigfaltigkeiten gültig für Reduktion modulo einem diskreten Primdivisor vom Range 1, so ist er allgemein gültig. Dabei muß allerdings darauf geachtet werden, daß die Voraussetzungen über die zu reduzierende Mannigfaltigkeit so beschaffen sind, daß sie bei Konstantenerweiterung nicht gestört werden.

Zufolge dieses allgemeinen Prinzips erweist es sich, daß es nicht wesentlich allgemeiner ist, wenn man die Theorie der Konstantenreduktionen auf den Begriff eines allgemeinen Primdivisors aufbaut, wie wir es hier getan haben, anstatt sich auf diskrete Primdivisoren vom Range 1 zu beschränken. Für manche Anwendungen scheint es jedoch zweckmäßig zu sein, eine Theorie in der von uns behandelten Allgemeinheit zur Verfügung zu haben, zum Beispiel wenn k algebraisch abgeschlossen ist.

Es wäre wünschenswert, für die Reduktionssätze und damit für die Sätze II und III einen Beweis zu liefern, welcher nicht erst den diskreten Fall behandelt, sondern welcher allgemein gültig ist.

Literaturverzeichnis.

[1] *N. Bourbaki*, Topologie générale (fascicule de résultats). Act. Sci. et Industr. No. 1196 (1953).

[2] *I. S. Cohen*, On the structure and ideal theory of complete local rings. Trans. Amer. Math. Soc. **59** (1946), 54—106.

[3] *M. Deuring*, Reduktion algebraischer Funktionenkörper nach Primdivisoren des Konstantenkörpers. Math. Z. **47** (1942), 643—654.

[4] *M. Deuring*, Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve v. Geschlecht 1. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. 1955, 13—42.

[5] *H. Hasse*, Zahlentheorie, Berlin 1949.

[6] *W. Krull*, Dimensionstheorie in Stellenringen. J. reine angew. Math. **179** (1938), 204—226.

[7] *W. Krull*, Zur Theorie der kommutativen Integritätsbereiche. J. reine angew. Math. **192** (1954), 230—252.

[8] *E. Lamprecht*, Bewertungssysteme und Zetafunktionen algebraischer Funktionenkörper I, II. Math. Ann. **131** (1956), 313—335; Archiv d. Math. **7** (1956), 225—234.

[9] *E. Lamprecht*, Zur Eindeutigkeit von Funktionalprimdivisoren. Arch. d. Math. **8** (1957), 30—38.

[10] *S. Lang*, Introduction to algebraic geometry. Chicago 1954 (Lecture Notes).

[11] *M. Nagata*, A general theory of algebraic geometry over Dedekind domains I. Amer. J. Math. **78** (1956), 78—116.

[12] *P. Roquette*, Arithmetische Untersuchung des Abelschen Funktionenkörpers. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **18** (1952), 144—178.

[13] *M. Rosenlicht*, Equivalence relations on algebraic curves. Annals of Math. **56** (1952), 169—191.

[14] *P. Samuel*, Algèbre locale. Mém. Sci. Math., Fasc. 123. Paris 1953.

[15] *O. F .G. Schilling*, The theory of valutions. New York 1950.

[16] *A. Seidenberg*, The hyperplane sections of normal varieties. Transact. Amer. Math. Soc. **63** (1950), 357—386.

[17] *J. P. Serre*, Faisceaux algébriques cohérents. Annals of Math. **61** (1955), 197—278.

[18] *J. P. Serre*, Sur la dimension homologique des anneaus et des modules noethériens. Proc. Intern. Symp. Tokyo 1956, 175—189.

[19] *G. Shimura*, Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field. Amer. J. Math. **77** (1955), 134—176.

[20] *E. Snapper*, Higher-dimensional field theory I, II, III, Compositio Math. **13** (1956), 1—15, 16—38, 39—46.

[21] *O. Zariski*, Foundations of a general theory of birational transformations. Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943), 490—542.

[22] *O. Zariski*, The concept of a simple point of an abstract algebraic variety. Trans. Amer. Math. Soc. **62** (1947), 1—52.

[23] *O. Zariski*, Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques-Severi. Annals of Math. **55** (1952), 552—592.

[24] *O. Zariski*, Algebraic sheaf theory. Sci. report 2nd summer inst., III. Bull Amer. Math. Soc. **62** (1956), 117—141.

Eingegangen 8. Mai 1957.

Bemerkung bei der Korrektur. Inzwischen erhielt ich Kenntnis von einer Arbeit von *Igusa* (Arithmetic genera of normal varieties in an algebraic family; Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **41** (1955), 34—37). In dieser Arbeit wird unser Satz I in dem Falle bewiesen, wo $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}\mathfrak{p}$ dieselbe Charakteristik besitzen, wo also $V\mathfrak{p}$ eine „Spezialisierung" von V im Sinne der algebraischen Geometrie ist (ferner wird dort noch zusätzlich vorausgesetzt, daß $V\mathfrak{p}$ absolut ganzabgeschlossen ist). Das Igusasche Ergebnis ist also als Spezialfall in Satz I enthalten. Im Falle der Dimension 1 findet es sich übrigens bereits in Arbeiten von *Chow* (On the genus of curves of an algebraic system; Trans. American Math. Soc. **65** (1949), 137—140) und von *Nakai* (On the genus of algebraic curves; Kyoto Math. Mem. **27** (1952), 163—165).

Reduction mod p of p-adic divisor classes.

By *Arthur Mattuck* in Cambridge (Mass.), USA.

1. Suppose that a function field K in one variable over a constant field k is given. If k is the real or complex field or a finite field, the structure of the group $\mathfrak{D}$ of divisor classes of degree zero of K/k is well-known. For other ground fields, our information is less precise. In particular, if k is a p-adic field one knows at present [7, 8] only that k contains a subgroup $\mathfrak{Z}$ of finite index "analytically" isomorphic to the direct sum of g copies of the integers of k, where g is the genus of K/k.

We observe here that in the p-adic case a simple way to obtain more information about $\mathfrak{D}$ is by using the Deuring theory [3] of reduction modulo p. If we reduce K/k mod p to a function field K'/k', it turns out that $\mathfrak{D}$ is mapped homomorphically *onto* the corresponding group $\mathfrak{D}'$ of K'/k'; thus $\mathfrak{D}/\mathfrak{Z}$ has $\mathfrak{D}'$ as factor group. This mapping, it should be remarked, is not in general order-preserving in the group-theoretical sense, and one may get in particular some of the classes of order p^i in $\mathfrak{D}'$ as images of classes of infinite order in $\mathfrak{D}$.

To go further, one needs to know what the relation of the subgroup $\mathfrak{Z}$ is to the kernel of the reduction mapping. At present this information is available only in the elliptic case, as a result of Lutz' explicit computations with elliptic curves. In general if k is unramified then $\mathfrak{Z}$ is exactly the kernel, and it is interesting to make a few deductions from this. For instance it is easy to see that all points of order prime to p have unramified coordinates, while somewhere between zero and "half" of the points of order p^i do.

2. To prove that under a suitable reduction mod p, $\mathfrak{D}$ goes onto $\mathfrak{D}'$, two methods are at hand — a field-theoretic and an algebro-geometric. We choose the former, but let us outline briefly both methods.

Field-theoretically, we start with a reduction $K/k \to K'/k'$ in the sense of Deuring [3] and assume it to be "non-degenerate". This means roughly that it should be describable by simply reading mod p the defining equation $f(x, y) = 0$ of a plane curve C, where the reduced curve C' with equation $f'(x', y') = 0$ is assumed to have the same degree and same genus as C. Thus a little geometry sneaks into the definition — the reduction is not entirely invariant. Deuring's main result is then that this reduction induces in a natural way a homomorphism of the divisors and divisor classes of K/k *into* those of K'/k'. To show this map is *onto* in the p-adic case, we prove by a refining process that the map is actually onto at the level of prime divisors. The technique is to prove a simple "local uniformization" in the plane: given a prime $\mathfrak{p}'$, one can find a model $f(x, y) = 0$ such that $f(x, y) \to f'(x', y')$ gives the reduction map and such that $\mathfrak{p}'$ is nonsingular on $f'(x', y') = 0$. Then one refines $\mathfrak{p}'$ to a prime $\mathfrak{p}$ by Newton's lemma.

The theorem depends on the existence of a non-degenerate reduction mod p of K/k. This is inherent in the nature of things and it would be of interest therefore to characterize fields admitting such a reduction. We remark here only that there certainly are fields

which do not: for example, the field of a p-adic elliptic curve C without rational points (such as the 3-adic projective curve $x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 0$). Namely, if $C \to C'$ were non-degenerate, then C' would be an elliptic curve over a finite field, hence would have a rational point which could be refined back by the theorem to a rational point of C. Other likely candidates for such fields are suggested in part II.

Going back to the "ontoness" theorem, to prove it algebro-geometrically one would first show that the Deuring reduction $K/k \to K'/k'$ can be expressed by a reduction (in the sense of Shimura [9] of a nonsingular curve C to a nonsingular curve C'. Now if one constructs by Chow's method the Jacobians $J(C)$ and $J'(C')$ of these two curves, the reduction can be extended to one of $J \to J'$. Finally, one can then apply a generalization of Hensel's lemma to varieties according to which any simple point on the reduced variety can always be refined back to a simple point on the original one; since all points of J' are simple, one then gets the theorem.

We follow the first method, partly as a matter of taste, partly because it is more elementary, and partly because some of the relevant material for the other method is not yet in the literature.

I. Reduction of $\mathfrak{D}$ mod p.

3. *Non-degenerate reductions.* We begin by briefly recalling the salient facts of Deuring's theory.

Let k be a field with a discrete valution p whose residue class field is k'. Let K/k be a function field in one variable with k as constant field, and extend p to K so that the residue class field K' has dimension 1 over k'. Namely, choose a non-constant $x \in K$, extend p naturally to $k(x)$ so that $k'(x')$ is the residue class field (where x' is transcendental over k'), and then extend p in some way to K. The place mapping $K \to Kp = K'$ is called the reduction mod p.

Definition. Such a reduction will be called *non-degenerate* if in addition

1. K' is a regular extension of k' (meaning, k' is actually the constant field of K' and K' is separably generated over k'),
2. genus of K = genus of K',
3. p remains prime in K (equivalently: $[K: k(x)] = [K': k'(x')]$).

We suppose from now on that the reduction is non-degenerate. Then Deuring defines a map Φ of the divisors of K/k into the divisors of K'/k' as follows. Let x, x' be as before, and let $\mathfrak{n}_x$ and $\mathfrak{n}'_{x'}$ be their respective divisors of poles. We wish to describe $\Phi(\mathfrak{a})$, where $\mathfrak{a}$ is a divisor of K/k. To this end, take a sufficiently large integer t and let $\mathfrak{M}$ be the module of field elements which are multiples of $(\mathfrak{a}\mathfrak{n}_x^t)^{-1}$. One proves that the p-integral elements of $\mathfrak{M}$ go under the reduction place-mapping into a module $\mathfrak{M}'$ which turns out to be exactly the set of multiples of $(\mathfrak{a}'\mathfrak{n}_{x'}^t)^{-1}$ for a certain divisor $\mathfrak{a}$ which doesn't depend on t. Then $\Phi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}'$. This map is the same as the algebro-geometric "specialization of the 0-cycle $\mathfrak{a}$" associated with the "specialization" $C \to C'$ of a suitable non-singular model of the function field.

More generally, Deuring then shows that if $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{a}'$ have the same index of speciality (in particular this will be automatically true if $\mathfrak{a}'$ is nonspecial), the module of multiples of $\mathfrak{a}^{-1}$ goes exactly onto the module of multiples of $\mathfrak{a}'^{-1}$, or what is the same thing, the linear system $|\mathfrak{a}|$ goes onto $|\mathfrak{a}'|$.

4. *Reduction mod p under constant field extension.* We add here a few technical remarks about the behavior of Φ under a particularly simple type of constant field extension we will use.

Suppose that k is complete under its discrete valuation. It is well known that the unramified extensions of k are in $1-1$ correspondence with the separable extensions of k', the latter being just the residue class fields of the former. If E is any unramified extension of k, then we wish to show that for the constant field extension KE/E the reduction mod $\mathfrak{p}$ is still non-degenerate and that the reduction map Φ^* on the divisors of KE/E actually extends Φ, in the sense that (using Chevalley's language [2]), Φ^* (Con $\mathfrak{a}$) $=$ Con $\Phi(\mathfrak{a})$.

These things are simple enough to show. The valution $\mathfrak{p}$ on K extends uniquely to E, and from there to $E(x)$; extend it in any way at all to KE and use it to reduce KE to $(KE)'$. Everything now goes smoothly because both E' and E are separable over k' and k respectively. Quite generally [1], if KF is a constant field extension of K/k, and F is separable over k, then F is the new constant field of KF, genus is preserved, and $[K: k(x)] = [KF: F(x)]$ for any transcendental $x \in K$. Applying these facts to show the nondegeneracy of $KE \to (KE)'$, we see that $(KE)' = K'E'$ so that $K'E'$ is regular over E'; furthermore,

$$g(KE/E) = g(K/k) = g(K'/k') = g(K'E'/E'), \text{ and}$$
$$[KE: E(x)] = [K: k(x)] = [K': k'(x')] = [K'E': E'(x')].$$

Note for future reference that if E/k is a normal extension with Galois group G, so is KE/K since the degrees are the same. Also, G may be viewed in a canonical way as the group of E'/k' and hence of $K'E'/E'$ as well, by reading mod $\mathfrak{p}$ its action on E/k.

To prove now that Φ^*(Con $\mathfrak{a}$) $=$ Con $\Phi(\mathfrak{a})$, we observe first that it is true for $\mathfrak{a} = \mathfrak{n}_x$, the polar divisor of the element x used to define the reduction mod $\mathfrak{p}$. Namely, Deuring shows that $\Phi(\mathfrak{n}_x) = \mathfrak{n}'_{x'}$, the polar divisor of x'; this relation, looked at in the constant field extension, is then the desired result. For general $\mathfrak{a}$, let $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{M}'$ be as before; then according to Deuring we can choose a basis $z_1, \ldots, z_n$ of $\mathfrak{M}$ over k such that $z'_1, \ldots, z'_n$ is a basis of $\mathfrak{M}'$ over k'. This implies that the reduction carries the module $\mathfrak{M}E = Ez_1 + \cdots + Ez_n$ exactly onto $\mathfrak{M}'E'$. But by the general theory of constant field extensions, $\mathfrak{M}E$ is the module of multiples of (Con $\mathfrak{a}$ Con $\mathfrak{n}_x^t)^{-1}$ and $\mathfrak{M}'E'$ is the module of multiples of (Con $\mathfrak{a}'$ Con $\mathfrak{n}_{x'}'^t)^{-1}$; therefore by definition of Φ^*, we have) Φ^* (Con $\mathfrak{a}$) $=$ Con $\mathfrak{a}'$.

5. *The local uniformization lemma.* What permits the refining of a prime $\mathfrak{p}'$ back to a prime $\mathfrak{p}$ is the following lemma. Part of the argument occurs already in Deuring's work; in fact the lemma itself is a reading "between the lines" in Deuring.

Recall first that a separable prime is one whose residue class field is a separable extension of the constant field. By prescribing a specific generation $K = k(u, t)$ for the function field, with $f(u, t) = 0$ the irreducible polynomial equation for u over $k[t]$, we associate with K/k the plane curve defined by this equation, called a *model* of the function field.

Lemma. Let $K/k \to K'/k'$ be non-degenerate and let $\mathfrak{p}'$ be a separable prime of K'/k'. Then we can find models $f(u, t) = 0$ and $f'(u', t') = 0$ of the two fields such that

(i) under the reduction map, $u \to u'$, $t \to t'$, $f \to f'$;

(ii) $\mathfrak{p}'$ is represented on the model for K' by a non-singular point: $f'_{u'}(u'\mathfrak{p}', t'\mathfrak{p}') \neq 0$;

(iii) t' is a local parameter for $\mathfrak{p}'$, and $u'\mathfrak{p}' \neq \infty$.

It then follows that

(iv) any foreimage $\mathfrak{p}$ for $\mathfrak{p}'$ under the reduction map is also represented by a non-singular point on the model for K.

Proof. We begin by showing that $t \in K$ can be chosen so that its image t' under the reduction is a local parameter for $\mathfrak{p}'$ and such that $[K: k(t)] = [K': k'(t')]$ — in other words, we can replace the x originally used to define the reduction by an element t whose image at the same time uniformizes a given separable prime.

Indeed, let $\mathfrak{o}$ be a prime in K/k such that $\mathfrak{p}' \nmid \mathfrak{o}'$. According to a lemma of Deuring [3, p. 649], any divisor class $\mathfrak{C}$ contains positive divisors relatively prime to a given divisor if only the degree of $\mathfrak{C}$ is large enough. Therefore, for sufficiently large r, we can find a positive divisor $\mathfrak{q}'$ in the class of $\mathfrak{o}'^r \mathfrak{p}'^{-1}$ which is prime to both $\mathfrak{o}'$ and $\mathfrak{p}'$. Then $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'\mathfrak{o}'^{-r}$ is the divisor of an element t' in K' which uniformizes $\mathfrak{p}'$. Again, for r sufficiently large, $\mathfrak{o}'^r$ will be nonspecial, so that the reduction maps the module of multiples of $\mathfrak{o}^{-r}$ exactly onto the multiples of $\mathfrak{o}'^{-r}$, by the general theory. In particular therefore, t' will have a foreimage t, and this is the element we want. Namely, the divisor of t is $\mathfrak{a}\mathfrak{o}^{-r}$, where $\mathfrak{a}' = \mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$; this means that $\mathfrak{o} \nmid \mathfrak{a}$ since $\mathfrak{o}' \nmid \mathfrak{a}'$. Thus

$$[K: k(t)] = r \cdot \deg \mathfrak{o} = r \cdot \deg \mathfrak{o}' = [K': k'(t')].$$

To continue now, select u' in K' such that $K' = k'(u', t')$ and $u'\mathfrak{p}' \neq \infty$. Let $u \in K$ be a foreimage of u', and let $f(u, t) = 0$ be the equation for u over $k[t]$, normalized so that all of its coefficients are $\boldsymbol{p}$-integral, with at least one a $\boldsymbol{p}$-unit. Then the image of $f(u,t)$ under the reduction, $f'(u', t')$, is non-zero and hence must be the irreducible polynomial for u' over $k'[t']$ since $[K: k(t)] = [K': k'(t')]$. This shows also that $K = k(u, t)$. Furthermore, $\mathfrak{p}'$ is unramified over $k'(t')$ since $\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}'} t' = 1$ and $\mathfrak{p}'$ is separable. Therefore $\mathfrak{p}'$ doesn't divide the different $D_{K'|k'(t')}$ and so, for suitable u', $f'_{u'}(u'\mathfrak{p}', t'\mathfrak{p}') \neq 0$.

Finally if $\mathfrak{p}$ is any foreimage of $\mathfrak{p}'$, $f_u(u\mathfrak{p}, t\mathfrak{p})$ is a foreimage of $f'_{u'}(u'\mathfrak{p}', t'\mathfrak{p}')$ and is therefore not zero.

6. *Theorem.* Let $K/k \to K'/k'$ be a nondegenerate reduction mod $\boldsymbol{p}$, where k is complete under the valuation $\boldsymbol{p}$. Then any separable prime $\mathfrak{p}'$ in K'/k' is the image of some prime $\mathfrak{p}$ in K/k.

Proof. First assume that $\mathfrak{p}'$ is of degree one; the general case will then follow by making a constant field extension. Choose according to the lemma the models $f(u, t) = 0$ and $f'(u', t') = 0$, and put $u'\mathfrak{p}' = \alpha' \in k'$. Then $\mathfrak{p}'$ is represented on $f'(u', t') = 0$ by the nonsingular point $(\alpha', 0)$. If α_0 is a $\boldsymbol{p}$-integer in k such that $\alpha_0 \to \alpha'$, then since $f'(\alpha, 0) = 0$ and $f'_{u'}(\alpha', 0) \neq 0$, we have

$$\frac{f(\alpha_0, 0)}{f_u(\alpha_0, 0)^2} \equiv 0 \pmod{\boldsymbol{p}}.$$

Since now k is complete, all the conditions for the application of the non-archimedean version of the classical Newton root approximation method [6] are fulfilled, and we can therefore refine α_0 to an exact root α of $f(u, 0) = 0$, in such a way that $\alpha \to \alpha'$ and $f_u(\alpha, 0) \neq 0$. Then $(\alpha, 0)$ is a nonsingular point on $f(u, t) = 0$ and therefore a unique place $\mathfrak{p}$ of K/k lies over it.

We claim that $\Phi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}'$. In fact, if we put $\Phi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}'$, say, then $u'\mathfrak{q}' = (u\mathfrak{p})' = \alpha' = u'\mathfrak{p}'$ and $t'\mathfrak{q}' = (t\mathfrak{p})' = 0 = t'\mathfrak{p}'$, so that both $\mathfrak{p}'$ and $\mathfrak{q}'$ lie over the same point $(\alpha', 0)$ of $f'(u', t') = 0$. But this point is nonsingular, and has therefore only one place over it, so $\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}'$.

To prove the result for a prime $\mathfrak{p}'$ of higher degree, let E' be a normal, separable extension of k' which splits $\mathfrak{p}'$; that is, $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'_1 \cdots \mathfrak{p}'_n$ in the constant field extension $K'E'/E'$, where the $\mathfrak{p}'_i$ are all of degree one and different since there is no ramification in

separable constant field extensions. The $\mathfrak{p}_i'$ form a complete set of conjugates. Let E be the corresponding unramified extension of k, and extend the reduction mod $\boldsymbol{p}$ to KE/E as described previously. Now by the above, we can find a $\mathfrak{p}_1$ in KE/E such that $\Phi(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_1'$. Since as we remarked in section 3, the action of the Galois group of KE/E commutes with the reduction mod $\boldsymbol{p}$, it follows that if we denote the conjugates of $\mathfrak{p}_1$ by $\mathfrak{p}_i = \sigma_i(\mathfrak{p}_1)$ ($\sigma_i \in$ group), then $\mathfrak{p}_i = \sigma_i(\mathfrak{p}_1) \to \sigma_i'(\mathfrak{p}_1') = \mathfrak{p}_i'$. The divisor $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$ now consists of a complete set of conjugate primes, hence it may be viewed as a prime $\mathfrak{p}$ in K/k; more precisely, $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n = \operatorname{Con} \mathfrak{p}$. Since now we know that $(\operatorname{Con} \mathfrak{p})' = \operatorname{Con} \mathfrak{p}'$, it follows that $\Phi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}'$.

Finally, let us assume that k' is perfect — for example, if k is a $\boldsymbol{p}$-adic field or a power series field in one variable with a finite or algebraically closed constant field; then all primes $\mathfrak{p}'$ will be separable; therefore all primes, all divisors, and all divisor classes of K'/k' will be images under Φ.

Corollary. Let k be complete with perfect residue class field k', and let K/k be a function field in one variable with divisor class group $\mathfrak{D}$ of degree 0. Then under a non-degenerate reduction mod $\boldsymbol{p}$: $K/k \to K'/k'$, $\mathfrak{D}$ is mapped onto the corresponding group $\mathfrak{D}'$ of K'/k'.

II. The Structure of $\mathfrak{D}$ over local fields.

7. *General remarks for arbitrary genus.* Suppose now that the ground field k is a local field, that is, complete under a discrete valuation $\boldsymbol{p}$ with finite residue class field containing p^l elements. Then k contains its subring I of "$\boldsymbol{p}$-adic" integers; let $I(n)$ be the direct sum of n copies of I.

By theorems of Lutz and the author [5, 7, 8], the group $\mathfrak{D}$ of divisor classes of degree 0 has a subgroup $\mathfrak{Z}$ of finite index isomorphic to $I(g)$. From this we deduce that

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{E}$$

where $\mathfrak{D}_0$ is the subgroup of elements of order prime to p, and $\mathfrak{E}$ is a finite p-extension of $\mathfrak{Z}$.

Proof. Decompose $\mathfrak{D}/\mathfrak{Z}$ into its prime-to-p part and its p-part:

$$\mathfrak{D}/\mathfrak{Z} = (\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})_0 \oplus (\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})_p$$

and put $\mathfrak{E} =$ union of the cosets in $(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})_p$. Then if n is prime to p, we have $n\mathfrak{E} = \mathfrak{E}$: this follows immediately from the divisibility by n of the factor group $\mathfrak{E}/\mathfrak{Z}$ — because it is isomorphic to the p-group $(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})_p$ — and of the subgroup $\mathfrak{Z}$, because it has the structure of $I(g)$. To prove the direct sum decomposition of $\mathfrak{D}$, we see first that $\mathfrak{D}_0 \cap \mathfrak{E} = 0$ since $\mathfrak{E}$ is a p-extension of a group which has no elements of finite order. To show $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{E}$: given $x \in \mathfrak{D}$, let ξ be its image in $\mathfrak{D}/\mathfrak{Z}$. Then $n\xi \in (\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})_p$ for some n prime to p and therefore $nx \in \mathfrak{E}$. Find $e \in \mathfrak{E}$ such that $ne = nx$; then evidently $x = (x - e) + e$ is the required decomposition.

Now let $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}'$ be a non-degenerate reduction mod $\boldsymbol{p}$. Then $\mathfrak{D}'$ also splits into its prime-to-p part and p-part: $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}_0' \oplus \mathfrak{D}_p'$.

Theorem. $\mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{E} \to \mathfrak{D}_0' \oplus \mathfrak{D}_p'$ is componentwise onto. If $\mathfrak{Z}$ is exactly the kernel of $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}'$, then $\mathfrak{D}_0 \to \mathfrak{D}_0'$ and $\mathfrak{E}/\mathfrak{Z} \to \mathfrak{D}_p'$ are isomorphisms onto.

Proof. Since the map $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}'$ is onto, it suffices to show that under the reduction $\mathfrak{D}_0$ and $\mathfrak{E}$ go into $\mathfrak{D}_0'$ and $\mathfrak{D}_p'$ respectively. This is obvious for $\mathfrak{D}_0$. As for $\mathfrak{E}$, we note that its subgroup $\mathfrak{Z}$ must be mapped into $\mathfrak{D}_p'$ since $I(g)$ has no factor group of order prime to p; it follows that $\mathfrak{E}$ then also goes into $\mathfrak{D}_p'$ since it is a p-extension of $\mathfrak{Z}$. Since $\mathfrak{E} > \mathfrak{Z}$, the rest is obvious.

To go further, we need more precise information about the relation of $\mathfrak{Z}$ to the kernel of the reduction map, and this is at present available only in certain elliptic cases to which we therefore now turn.

8. *Elliptic curves over $\boldsymbol{p}$-adic fields.* We consider the class of elliptic function fields over $\boldsymbol{p}$-adic (not just local) ground fields for which we know at present that under a suitable reduction mod $\boldsymbol{p}$, the kernel of the map Φ will be exactly the subgroup $\mathfrak{Z} = I$. Namely, we study those elliptic fields K/k such that

(i) k is unramified[1]),

(ii) $K = k(x, y)$ where $y^2 = x^3 - ax - b$, $a, b \in I$, $4a^3 - 27b^2 \not\equiv 0 \pmod{\boldsymbol{p}}$.

The first restriction is inherent in the treatment, since over ramified ground fields the structure of $\mathfrak{D}$ becomes significantly more complicated and neither reduction mod $\boldsymbol{p}$ nor $\boldsymbol{p}$-adic elliptic functions give complete information. The second condition guarantees that there is a non-degenerate reduction mod $\boldsymbol{p}$. Some such restriction is also inherent, since the group $\mathfrak{D}$ is otherwise somewhat larger, apparently increasing more or less linearly with $\mathrm{ord}_p(4a^3 - 27b^2)$ — one is tempted to call such fields "ramified" and to guess that they have in general no non-degenerate reductions. On the other hand, the particular form given to the condition is open to investigation: to what[2]) extent a given abstract non-degenerate reduction mod $\boldsymbol{p}$ can be expressed by reducing $y^2 = x^3 - ax - b$ mod $\boldsymbol{p}$ is not considered here, nor are the function fields included which have no model of the given form — those without rational primes or some for which $p = 2$ or 3.

For fields satisfying condition (ii), if we realize $\mathfrak{D}$ as the group of rational points on the cubic under the well-known composition law, the reduction map $\Phi: \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}'$ is obtained simply by reading the point coordinates and group composition law mod $\boldsymbol{p}$. Now on the one hand, the kernel of Φ is obviously just $\mathfrak{D}_{(0)}$, the subgroup consisting of points with negative ordinal (these being the ones going into the identity point $[\infty, \infty]$ on the reduced curve). And on the other hand, Lutz showed [7] that the subgroup $\mathfrak{Z}$ could always be taken to be the subgroup $\mathfrak{D}_{(-\frac{1}{2})}$ of points whose x-coordinates have absolute ordinal $< -{}^1/_2$. We conclude that if condition (i) is satisfied — k unramified — then $\mathfrak{D}_{(0)} = \mathfrak{Z}$.

Thus for such fields the little theorem of § 7 applies and we have

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{E}/\mathfrak{Z} = \mathfrak{D}'_p.$$

Over the algebraic closure of the finite constant field

$$\mathfrak{D}'_p = 0 \text{ or } \mathfrak{D}'_p = Q_p/Z_p \text{ (rational } p\text{-adics mod 1)},$$

according to whether the Hasse invariant A' is zero or not; over the finite constant field itself we have therefore

$$\mathfrak{D}'_p = 0 \text{ or } \mathfrak{D}'_p = Z/(p^r), \ (r \geqq 0).$$

So looking at the group $\mathfrak{D}_p$ of points with coordinates in the unramified field k and whose order is a power of p, we see that since evidently $\mathfrak{D}_p \cap \mathfrak{Z} = 0$, it follows that $\mathfrak{D}_p$ is mapped isomorphically into $\mathfrak{D}'_p$. So if the Hasse invariant $A' = 0$, there are no such points. If $A' \neq 0$, then $\mathfrak{D}_p$ is some subgroup of $\mathfrak{D}'_p = Z/(p^r)$; if it is the whole group, so that $\mathfrak{D}_p \to \mathfrak{D}'_p$ is onto, then one sees immediately that $\mathfrak{E}$ splits: $\mathfrak{E} = \mathfrak{D}_p \oplus \mathfrak{Z}$.

---

[1]) Thus inwhat follows we could write simply p instead of $\boldsymbol{p}$.

[2]) Roquette has written me that Deuring proved that condition (ii) is also necessary for non-degenerate reduction (at least if $p \neq 2, 3$), provided that one assumes K/k to have a rational prime. In the present case, this is so because the rational prime that K'/k' always has (it being elliptic over a finite field) can be refined back to one of K/k, by the theorem.

Another way of looking at these results is as follows. Pass to the maximal unramified extension E of k as ground field; then $\mathfrak{D}_0$ is reduced mod $\boldsymbol{p}$ isomorphically onto $\mathfrak{D}'_0$ and it follows easily that all points of order prime to p have unramified coordinates.

On the other hand, over the algebraic closure of k, $\mathfrak{D}_p$ has the classical structure $Q_p/Z_p \oplus Q_p/Z_p$, while $\mathfrak{D}'_p = 0$ or $\mathfrak{D}'_p = Q_p/Z_p$. Therefore if the Hasse invariant $A' = 0$, then $\mathfrak{D}'_p = 0$, and so $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{Z}$ over the constant field E. Thus all points of order p^i have ramified coordinates. For the case $A' \neq 0$, we may make use of a remark of Lang and Tate to the effect that the algebro-geometric compatibility of cycle intersection with reduction mod $\boldsymbol{p}$ implies that for any n, the points of order n are reduced mod $\boldsymbol{p}$ *onto* the points of order n; in the present language, if we denote by μ the meromorphism of K corresponding to multiplication by n in the divisor class group, then $K > K\mu$ gets reduced onto $K' > (K\mu)' = K'\mu'$ nicely and the remark then is that the reduction map commutes with the conorm operation, $\mathrm{Con}_{K\mu|K}$; using Deuring's theory, this last is not difficult to show directly. Anyway, for each i, the group of points of order p^i goes onto the group of points of order p^i; using the known structures of these groups it follows group-theoretically that the kernel is cyclic of order p^i. If we now pass to the limit, we conclude that the kernel of the reduction map contains a subgroup of $\mathfrak{D}_p$ with the structure Q_p/Z_p, all of whose points necessarily have ramified coordinates, while the factor group is reduced isomorphically onto $\mathfrak{D}'_p = Q_p/Z_p$. The subgroup of $\mathfrak{D}_p$ with unramified coordinates is then a subgroup of $\mathfrak{D}'_p$.

References.

[1] *E. Artin*, Algebraic numbers and algebraic functions I, mimeographed notes, New York University (1951), chap. XV.

[2] *C. Chevalley*, Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, American Mathematical Society Survey VI, p. 65.

[3] *M. Deuring*, Reduktion algebraischer Funktionenkörper nach Primdivisoren des Konstantenkörpers, Mathematische Zeitschrift, **47** (1942), 643–654.

[4] *H. Hasse*, Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I, Crelle, **175** (1936), 55.

[5] *J. Igusa*, Analytic Groups over complete fields, Proceedings National Academy of Sciences, **42** (1956) 540.

[6] *S. Lang*, On quasi-algebraic closure, Annals of Mathematics, **55** (1952), 380.

[7] *E. Lutz*, Sur l'équation $y^2 = x^3 - Ax - B$ dans les corps p-adiques, Crelle, **177** (1937), pp. 238–247.

[8] *A. Mattuck*, Abelian varieties over p-adic fields, Annals of Mathematics, **62** (1955), 92.

[9] *G. Shimura*, Reduction of Algebraic Varieties with respect to a discrete valuation of the basic field, American Journal of Mathematics, **77** (1955), 134.

Eingegangen 21. Juni 1956

Über einige Probleme der Addition von linearen Punktmengen.*).

Von *Hugo Schell* in Mainz.

Einleitung.

1. *Problemstellung.* In der additiven Zahlentheorie werden Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen betrachtet. Diese werden metrisch charakterisiert durch ihre finite oder asymptotische Dichte. Zwei Hauptprobleme der additiven Zahlentheorie sind:

(E. 1) Abschätzungen über die finite (asymptotische) Dichte einer Summenmenge bei vorgegebenen finiten (asymptotischen) Dichten der Summandenmengen,

(E. 2) Abschätzungen für wesentliche Komponenten.

Was allgemein die Bezeichnungen, Probleme und Ergebnisse der additiven Zahlentheorie anbelangt, so kann man diese etwa den Darstellungen von H. Rohrbach [22] und S. Selberg [23] entnehmen[1]).

D. Raikov [21] hat die grundlegenden Begriffe der Dichte, Summenmenge, Basis usw. in sinnvoller Weise auf beliebige lineare Punktmengen übertragen. In der vorliegenden Arbeit werden diese Begriffe übernommen. Das Ziel der Arbeit ist, die Resultate, die für die Probleme (E. 1) und (E. 2) für Mengen natürlicher Zahlen erhalten wurden, daraufhin zu untersuchen, ob sie sich auch auf beliebige lineare Punktmengen übertragen lassen — unter sinngemäßer Abänderung des Dichtebegriffes.

2. *Bezeichnungen.* Es werden Mengen $A, B, C, \ldots$ nichtnegativer Zahlen betrachtet. Es sei für irgendein $\xi \geqq 0$

$$\text{(E. 3)} \qquad \underline{m}_A(\xi) = \underline{m}(A \cap [0, \xi])$$

das *Abschnittsmaß der Menge A im Intervall* $[0, \xi]$ ($\underline{m}$ bedeutet dabei das innere Lebesguesche Maß); ihm entspricht die Anzahlfunktion bei Mengen natürlicher Zahlen. Als *Abschnittsdichte von A in* $[0, x]$ bezeichnet man die reelle Zahl

$$\text{(E. 4)} \qquad \delta_A(x) = \operatorname*{fin}_{0 < \xi < x} \frac{\underline{m}_A(\xi)}{\xi},$$

und als *finite Dichte von A* die Zahl

$$\text{(E. 5)} \qquad \delta(A) = \operatorname*{fin}_{0 < \xi < \infty} \frac{\underline{m}_A(\xi)}{\xi}.$$

Offenbar ist

$$\text{(E. 6)} \qquad \delta(A) = \operatorname*{fin}_{n = 1, 2, \ldots} \delta_A(n) = \lim_{n \to \infty} \delta_A(n).$$

---

*) Umgearbeitete Fassung einer bei der naturwissenschaftlichen Fakultät der Johannes-Gutenberg-Universität Mainz eingereichten Dissertation. Referent: Professor *Dr. H. Rohrbach.*

[1]) Die eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

Die *asymptotische Dichte der Menge A* ist erklärt als

$$\text{(E. 7)} \qquad \delta^*(A) = \varliminf_{n=1,2,\ldots} \delta_A(n).$$

$\delta^*(A)$ ist die größte der Zahlen γ^* mit der Eigenschaft: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $\xi_1(\varepsilon)$ derart, daß

$$\text{(E. 8)} \qquad \underline{m}_A(\xi) \geqq (\gamma^* - \varepsilon)\,\xi \text{ für } \xi \geqq \xi_1(\varepsilon).$$

Offenbar gilt

$$\text{(E. 9)} \qquad 0 \leqq \delta_A(x) \leqq \delta(A) \leqq \delta^*(A) \leqq 1.$$

Sind $A_1, \ldots, A_l$ irgend l solcher Mengen ($l \geqq 2$), dann versteht man unter der *Summe* dieser Mengen die Menge

$$\text{(E. 10)} \qquad \sum_{\lambda=1}^{l} A_\lambda = \left\{ \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda;\ a_\lambda \in A_\lambda \right\}.$$

Sind alle A_λ gleich A, so schreibt man dafür auch kürzer

$$\text{(E. 11)} \qquad lA = \left\{ \sum_{\lambda=1} a_\lambda;\ a_\lambda \in A \right\}.$$

In entsprechender Weise übertragen wir den Begriff der mehrgliedrigen Dichte (vgl. H. H. Ostmann [20]) und definieren als *l-gliedrige Abschnittsdichte der A_λ in* $[0, x]$

$$\text{(E. 12)} \qquad \sigma_{A_1,\ldots,A_l}(x) = \varliminf_{0<\xi<x} \frac{\sum_{\lambda=1}^{l} \underline{m}_{A_\lambda}(\xi)}{\xi},$$

als *l-gliedrige finite Dichte der A_λ*

$$\text{(E. 13)} \qquad \sigma(A_1, \ldots, A_l) = \varliminf_{0<\xi<\infty} \frac{\sum_{\lambda=1}^{l} \underline{m}_{A_\lambda}(\xi)}{\xi},$$

und als *l-gliedrige asymptotische Dichte der A_λ*

$$\text{(E. 14)} \qquad \sigma^*(A_1, \ldots, A_l) = \varliminf_{n=1,2,\ldots} \sigma_{A_1,\ldots,A_l}(n).$$

In Analogie zu (E. 8) bedeutet dies

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \underline{m}_{A_\lambda}(\xi) \geqq (\sigma^*(A_1, \ldots, A_l) - \varepsilon)\,\xi \text{ für } \xi \geqq \xi_2(\varepsilon).$$

Ferner gilt

$$\text{(E. 15)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \sigma_{A_1,\ldots,A_l}(x) &\geqq \sum_{\lambda=1}^{l} \delta_{A_\lambda}(x), \\ \sigma(A_1, \ldots, A_l) &\geqq \sum_{\lambda=1}^{l} \delta(A_\lambda), \\ \sigma^*(A_1, \ldots, A_l) &\geqq \sum_{\lambda=1} \delta^*(A_\lambda), \\ \sigma^*(A_1, \ldots, A_l) &\geqq \sigma(A_1, \ldots, A_l). \end{aligned} \right.$$

3. *Ergebnisse.* Für Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen ist das finite Problem (E. 1) durch die Sätze von H. B. Mann [19] und J. G. van der Corput [7] abschließend behandelt. Mann bewies:

$$(*) \qquad \delta(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \geqq \sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \geqq \delta(\mathfrak{A}) + \delta(\mathfrak{B}), \text{ falls } 0 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}.$$

($\delta(\mathfrak{M})$ und $\sigma(\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_l)$ haben hier abweichend von unseren Definitionen die in der additiven Zahlentheorie für Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen übliche Bedeutung. Ist A eine Menge aus höchstens abzählbar vielen nichtnegativen reellen Zahlen, so wird $\delta(A)$ in unserer Bezeichnungsweise stets 0.) Dieses Ergebnis wurde von Artin und Scherk [1] und F. J. Dyson [8] für die Summe von $l \geqq 2$ Mengen übertragen:

$$(**) \qquad \delta\left(\sum_{\lambda=1}^{l} \mathfrak{A}_\lambda\right) \geqq \sigma(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_l) \geqq \sum_{\lambda=1}^{l} \delta(\mathfrak{A}_\lambda), \text{ falls } 0 \in \bigcap_{\lambda=1}^{l} \mathfrak{A}_\lambda.$$

Dann hat van der J. G. Corput durch Einführung von Gewichtsfunktionen $f(m)$, die gewissen Bedingungen genügen, (**) verallgemeinert.

In § 1 wird gezeigt, daß sich dieses Ergebnis in voller Allgemeinheit auch für lineare Punktmengen gewinnen läßt. In dieser Richtung war als Übertragung von (*) bisher nur die Abschätzung $\delta_{A+B}(x) \geqq \delta_A(x) + \delta_B(x)$ bekannt (D. Raikov [21]).

Bekanntlich gilt bei Mengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ mit der Summe $\mathfrak{C}$ und den asymptotischen Dichten $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ nicht allgemein $\gamma^* \geqq \alpha^* + \beta^*$. In § 2 wird gezeigt, daß für lineare Punktmengen auch im asymptotischen Falle die zu (**) analoge Ungleichung stets gilt.

Die nächsten Paragraphen beschäftigen sich mit dem zweiten Problem (E. 2). Für Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen hat P. Erdös die Vermutung

$$(***) \qquad \delta(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \geqq \alpha\left(1 + \frac{1-\alpha}{\lambda}\right)$$

ausgesprochen, wobei $\mathfrak{A}$ eine Menge der Dichte α und $\mathfrak{B}$ eine Basis der mittleren Ordnung λ darstellen. (***) ist noch nicht bewiesen. Abschätzungen in dieser Richtung stammen von P. Erdös [9], E. Landau [17], A. Brauer [2], A. Stöhr [26], S. Selberg [23] und F. Kasch ([13] und [14]). Die in [13] und [14] hergeleiteten Abschätzungen für wesentliche Komponenten sind die zur Zeit besten. Wir werden nachweisen, daß man diese mit einer kleinen Einschränkung auch auf lineare Punktmengen übertragen kann.

Durch eine Abänderung von auftretenden Abschätzungen kann man, analog dem Vorgehen von F. Kasch, auch Aussagen über Differenzenmengen gewinnen. Dies geschieht am Ende der Arbeit.

I. DICHTEN.

§ 1. Finite Dichte.

4. *Der allgemeine Satz.* Wir wollen den allgemeinen Satz von van der Corput mit Gewichtsfunktionen ([7], Satz 11) auf lineare Punktmengen übertragen.

$A_1, \ldots, A_l$ seien l Punktmengen in $[0, x]$, welche alle die Null enthalten. $\chi_{A_\lambda}(\zeta)$ sei die zu A_λ gehörige charakteristische Funktion. Wir setzen $C = \sum_{\lambda=1}^{l} A_\lambda$; wegen $0 \in A_\lambda (\lambda = 1, \ldots, l)$ sind alle $A_\lambda \subseteq C$. Ferner sei $f(\xi)$ eine für alle $\xi \in [0, x]$ erklärte reelle Funktion mit den Eigenschaften:

$$(1.1) \qquad \begin{cases} f(\xi) \text{ stetig in } [0, x], \\ f(\xi) > 0 \text{ in } [0, x], \\ f(\xi_1) \leqq f(\xi_2) \text{ für } 0 \leqq \xi_1 \leqq \xi_2 \leqq x, \\ f(\xi) \cdot f(\xi + 2\tau) \leqq f^2(\xi + \tau) \text{ für } 0 \leqq \xi \leqq \xi + 2\tau \leqq x. \end{cases}$$

Für $f(\xi) \equiv 1$ gehen in dem anschließenden Satz die linken Integrale von (1. 2) und (1. 3) in die inneren Maße über, die rechten werden gleich ξ. Wir beweisen den folgenden

Satz 1. *Ist* $0 \in A_\lambda (\lambda = 1, \ldots, l)$, *genügt* $f(\xi)$ *den Bedingungen* (1. 1) *und gilt*

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \int_0^\xi \chi_{A_\lambda}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \geqq \gamma \int_0^\xi f(\zeta)\, d\zeta \qquad (0 \leqq \xi \leqq x), \tag{1. 2}$$

wobei $\gamma \leqq 1$ *ist, dann ist auch*

$$\int_0^\xi \chi_C(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \geqq \gamma \int_0^\xi f(\zeta)\, d\zeta \qquad (0 \leqq \xi \leqq x). \tag{1. 3}$$

Wie bei Raikov wird der *Beweis* in drei Schritten geführt. Zunächst wird (1. 3) für Mengen bewiesen, die nur aus endlich vielen abgeschlossenen Intervallen bestehen, dann für perfekte Mengen, schließlich für beliebige lineare Punktmengen. Dieses Vorgehen liegt auf Grund der Definition des Lebesguesschen Maßes nahe.

Trivialerweise kann $\gamma > 0$ vorausgesetzt werden.

Erster Schritt. Alle Mengen A_λ bestehen aus der Null und endlich vielen abgeschlossenen Intervallen in $[0, x]$:

$$A_\lambda = \{0\} \cup \bigcup_{\varkappa=1}^{k_\lambda} J_\varkappa^{(\lambda)}, \quad J_\varkappa^{(\lambda)} = [a_\varkappa^{(\lambda)}, b_\varkappa^{(\lambda)}],$$

$$0 \leqq a_1^{(\lambda)} < b_1^{(\lambda)} < \ldots < b_{k_\lambda}^{(\lambda)} \; (\lambda = 1, \ldots, l).$$

Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine Zerlegung von $[0, x]$ in 2^n gleichlange abgeschlossene Intervalle

$$\hat{J}_\nu^{(n)} = [(\nu - 1)\, \eta, \nu\eta], \quad \eta = \frac{x}{2^n}, \quad \nu = 1, \ldots, 2^n.$$

Gewisse dieser Intervalle $\hat{J}_\nu^{(n)}$ liegen ganz in Intervallen $J_\varkappa^{(\lambda)}$, und die Ausfüllung der letzteren durch die $\hat{J}_\nu^{(n)}$ wird mit wachsendem n besser.

Es sei $\hat{A}_\lambda^{(n)} = \{0\} \cup \bigcup_\nu \hat{J}_\nu^{(n)}$, wo $\hat{J}_\nu^{(n)} \leqq A_\lambda$.

Offenbar ist

$$A_\lambda = \{0\} \cup \bigcup_{\varkappa=1}^{k_\lambda} [a_\varkappa^{(\lambda)}, b_\varkappa^{(\lambda)}] \geqq \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \hat{A}_\lambda^{(n)} \geqq \{0\} \cup \bigcup_{\varkappa=1}^{k_\lambda} (a_\varkappa^{(\lambda)}, b_\varkappa^{(\lambda)}). \tag{1. 4}$$

Nun sei eine Zahl $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

Lemma 1. *Zu* $\varepsilon > 0$ *gibt es eine Zahl* $n_1(\varepsilon)$ *derart, daß*

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \int_0^\xi \chi_{\hat{A}_\lambda^{(n)}}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \geqq \sum_{\lambda=1}^{l} \int_0^\xi \chi_{A_\lambda}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta - \varepsilon \int_0^\xi f(\zeta)\, d\zeta \tag{1. 5}$$

für $n \geqq n_1(\varepsilon)$ *in* $0 \leqq \xi \leqq x$ *gilt.*

Wegen (1. 4) gibt es nämlich zu $\omega > 0$ eine Zahl $n_3(\omega)$ mit

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \int_0^\xi \{\chi_{A_\lambda}(\zeta) - \chi_{\hat{A}_\lambda^{(n)}}(\zeta)\} f(\zeta)\, d\zeta < \omega$$

für $n \geqq n_3(\omega)$ und $0 \leqq \xi \leqq x$, also

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \int_0^\xi \chi_{\hat{A}_\lambda^{(n)}}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta > \sum_{\lambda=1}^{l} \int_0^\xi \chi_{A_\lambda}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta - \omega \tag{1. 6}$$

für $n \geqq n_3(\omega)$ und $0 \leqq \xi \leqq x$.

Damit das Fehlerglied ω auch in der Nähe des Nullpunkts von der in (1. 5) gewünschten Form ist, benutzen wir, daß die linken Eckpunkte $a_1^{(\lambda)} (\lambda = 1, \ldots, l)$ der endlich vielen Intervalle $J_1^{(\lambda)}$ entweder gleich 0 sind oder einen positiven Abstand vom Nullpunkt haben. Es gibt also zwei Zahlen v und $n_2(\varepsilon)$, so daß für $0 \leqq \xi \leqq v$ und $n \geqq n_2(\varepsilon)$

$$(1.7) \qquad \sum_{\lambda=1} \int_0^{\xi} \chi_{\hat{A}_\lambda^{(n)}}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{\lambda=1} \int_0^{\xi} \chi_{A_\lambda}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta$$

ist. Durch geeignete Wahl von ω folgt aus (1. 6) und (1. 7) die Behauptung (1. 5).

Aus (1. 2) und (1. 5) ergibt sich schließlich

$$(1.8) \qquad \sum_{\lambda=1}^{l} \int_0^{\xi} \chi_{\hat{A}_\lambda^{(n)}}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \geqq (\gamma - \varepsilon) \int_0^{\xi} f(\zeta)\, d\zeta$$

für $n \geqq n_1(\varepsilon)$; $0 \leqq \xi \leqq x$.

Aus der Stetigkeit von $f(\zeta)$ folgt ihre Riemann-Integrierbarkeit. Folglich ist für jedes $r \leqq 2^n$ und jedes n

$$(1.9) \qquad \int_0^{r\eta} f(\zeta)\, d\zeta \geqq \sum_{\varrho=1}^{r} \eta f((\varrho - 1)\eta) \qquad \begin{pmatrix} n = 1, 2, \ldots \\ r = 1, 2, \ldots, 2^n \end{pmatrix},$$

und die rechtsstehende Summe ist eine Untersumme des Integrals. Wegen $f(0) > 0$ und der Stetigkeit von $f(\zeta)$ im abgeschlossenen Intervall $[0, x]$ kann ferner eine Zahl $n_4(\varepsilon)$ angegeben werden, so daß für $n \geqq n_4(\varepsilon)$, d. h. für $\eta \leqq \eta_4(\varepsilon)$

$$(1.10) \qquad f((\varrho - 1)\eta) \geqq (1 - \varepsilon) f(\varrho\eta) \qquad \begin{pmatrix} n \geqq n_4(\varepsilon) \\ \varrho = 1, 2, \ldots, 2^n \end{pmatrix}$$

gilt. Wählt man noch $n_4(\varepsilon) \geqq n_1(\varepsilon)$, so ergibt sich aus (1. 8), (1. 9) und (1. 10)

$$(1.11) \qquad \sum_{\lambda=1}^{l} \int_0^{r\eta} \chi_{\hat{A}_\lambda^{(n)}}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \geqq (\gamma - \varepsilon)(1 - \varepsilon)\, \eta \sum_{\varrho=1}^{r} f(\varrho\eta)$$
$$(n \geqq n_4(\varepsilon);\ r = 1, \ldots, 2^n).$$

Für jedes n können wir nun $\hat{A}_\lambda^{(n)}$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ auf eine Menge nichtnegativer ganzer Zahlen $\mathfrak{A}_\lambda^{(n)}$ abbilden:

$$\mathfrak{A}_\lambda^{(n)} = \{0\} \cup \{\nu\}, \text{ für die } \hat{J}_\nu^{(n)} \leqq \hat{A}_\lambda^{(n)} (n = 1, 2, \ldots;\ \lambda = 1, \ldots, l).$$

$A_\lambda^{(n)}(r)$ seien die Anzahlfunktionen der $\mathfrak{A}_\lambda^{(n)}$; die Null wird wie üblich nicht mitgezählt. Für $r = 1, 2, \ldots, 2^n$ ist

$$(1.12) \qquad \int_0^{r\eta} \chi_{\hat{A}_\lambda^{(n)}}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{\varrho=1}^{r} \int_{(\varrho-1)\eta}^{\varrho\eta} \chi_{\hat{A}_\lambda^{(n)}}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \leqq \sum_{\varrho=1}^{r} f(\varrho\eta) \int_{(\varrho-1)\eta}^{\varrho\eta} \chi_{\hat{A}_\lambda^{(n)}}(\zeta)\, d\zeta.$$

Es gilt aber

$$(1.13) \qquad \int_{(\varrho-1)\eta}^{\varrho\eta} \chi_{\hat{A}_\lambda^{(n)}}(\zeta)\, d\zeta = \begin{cases} 0 \frown \hat{J}_\varrho^{(n)} \text{ nicht in } \hat{A}_\lambda^{(n)} \frown \varrho \notin \mathfrak{A}_\lambda^{(n)} \\ \eta \frown \hat{J}_\varrho^{(n)} \quad \text{in} \quad \hat{A}_\lambda^{(n)} \frown \varrho \in \mathfrak{A}_\lambda^{(n)}. \end{cases}$$

Aus (1. 11), (1. 12) und (1. 13) folgt

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \eta \sum_{\substack{\varrho \leqq r \\ \varrho \in \mathfrak{A}_\lambda^{(n)}}} f(\varrho\eta) \geqq (\gamma - \varepsilon)(1 - \varepsilon)\, \eta \sum_{\varrho=1}^{r} f(\varrho\eta).$$

Wir setzen nun $f^*(\varrho) = f(\varrho\eta)$. Wie man leicht nachprüft, besitzt $f^*(\varrho)$ die Eigenschaften

$$f^*(\varrho) > 0 \ (\varrho = 1, 2, \ldots, 2^n),$$
$$f^*(\varrho + 1) \geqq f^*(\varrho) \ (\varrho = 1, 2, \ldots, 2^n - 1),$$
$$f^{*2}(\varrho + 1) \geqq f^*(\varrho) f^*(\varrho + 2) \ (\varrho = 1, \ldots, 2^n - 2).$$

Für die Mengen natürlicher Zahlen $\mathfrak{A}_\lambda^{(n)}$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ gilt also

$$(1.14) \qquad \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\substack{\varrho \leq r \\ \varrho \in \mathfrak{A}_\lambda^{(n)}}} f^*(\varrho) \geqq (\gamma - \varepsilon)\,(1-\varepsilon) \sum_{\varrho=1}^{r} f^*(\varrho) \qquad (r = 1, \ldots, 2^n).$$

Setzt man $\mathfrak{C}^{(n)} = \sum_{\lambda=1}^{l} \mathfrak{A}_\lambda^{(n)}$, so gilt nach J. G. van der Corput ([7], Satz 11):

$$(1.15) \qquad \sum_{\substack{\varrho \leq r \\ \varrho \in \mathfrak{C}^{(n)}}} f^*(\varrho) \geqq (\gamma - \varepsilon)\,(1-\varepsilon) \sum_{\varrho=1}^{r} f^*(\varrho) \qquad (r = 1, \ldots, 2^n).$$

Die Bedeutung der $\hat{A}_\lambda^{(n)}$ für unser Problem zeigt

Lemma 2. *Wenn* $\nu \in \mathfrak{C}^{(n)} \cap [1, 2, \ldots, r]$ *und* $\hat{C}^{(n)} = \sum_{\lambda=1}^{l} \hat{A}_\lambda^{(n)}$ *ist, dann ist*

$$(1.16) \qquad \hat{J}_\nu^{(n)} \leqq \hat{C}^{(n)} \cap [0, \eta r].$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\nu = \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda^{(n)}$, $a_\lambda^{(n)} \in \mathfrak{A}_\lambda^{(n)} \cap [1, \ldots, r]$. Folglich wird

$$\sum_{\lambda=1}^{l} J_{a_\lambda^{(n)}}^{(n)} = \left[\eta \sum_{\lambda=1}^{l} (a_\lambda^{(n)} - 1),\ \eta \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda^{(n)}\right] \leqq \hat{C}^{(n)} \cap [0, \eta r],$$

also erst recht

$$\left[\eta\left\{\left(\sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda^{(n)}\right) - 1\right\},\ \eta \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda^{(n)}\right] = \left[\eta(\nu - 1),\ \eta\nu\right] = \hat{J}_\nu^{(n)} \leqq \hat{C}^{(n)} \cap [0, \eta r].$$

Unter Benutzung von (1. 10), Lemma 2 und (1. 15) ergibt sich die Abschätzung

$$(1.17) \qquad \int_0^{r\eta} \chi_{\hat{C}^{(n)}}(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta \geqq (\gamma - \varepsilon)\,(1-\varepsilon)^2 \int_0^{r\eta} f(\zeta)\, d\zeta \qquad (n \geqq n_4(\varepsilon);\ r = 1, \ldots, 2^n),$$

denn es ist

$$\begin{aligned}
\int_0^{r\eta} \chi_{\hat{C}^{(n)}}(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta &= \sum_{\varrho=1}^{r} \int_{(\varrho-1)\eta}^{\varrho\eta} \chi_{\hat{C}^{(n)}}(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta \\
&\geqq \sum_{\varrho=1}^{r} (1-\varepsilon) \int_{(\varrho-1)\eta}^{\varrho\eta} \chi_{\hat{C}^{(n)}}(\zeta)\, f(\varrho\eta)\, d\zeta \geqq \sum_{\substack{\varrho \leq r \\ \varrho \in \mathfrak{C}^{(n)}}} (1-\varepsilon)\, \eta f(\varrho\eta) \\
&\geqq (\gamma - \varepsilon)\,(1-\varepsilon)^2\, \eta \sum_{\varrho=1}^{r} f(\varrho\eta) \geqq (\gamma - \varepsilon)\,(1-\varepsilon)^2 \int_0^{r\eta} f(\zeta)\, d\zeta,
\end{aligned}$$

da $\eta \sum_{\varrho=1}^{r} f(\varrho\eta)$ eine Obersumme zu $\int_0^{r\eta} f(\zeta)\, d\zeta$ ist.

Wir betrachten nun die Funktionen

$$F_n(\xi) = \frac{\int_0^{\xi} \chi_{\hat{C}^{(n)}}(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta}{\int_0^{\xi} f(\zeta)\, d\zeta} \qquad (\xi > 0);\ F_n(0) = 1;\ n \geqq n_4(\varepsilon).$$

Die $F_n(\xi)$ sind Quotienten zweier in $[0, x]$ stetiger Funktionen, und da $\hat{C}^{(n)}$ für $\gamma > 0$ und $n \geqq n_4(\varepsilon)$ ein Intervall umfaßt, dessen linker Eckpunkt im Nullpunkt liegt, gibt es zu jedem n eine Zahl $\omega(n)$ mit $F_n(\xi) \equiv 1$ in $[0, \omega(n)]$. Folglich sind alle $F_n(\xi)$ in $[0, x]$ gleichmäßig stetig, und für die Punkte $r\eta = rx/2^n$ $(r = 1, \ldots, 2^n)$ gilt nach (1. 17)

$$F_n(r\eta) \geqq (\gamma - \varepsilon)(1 - \varepsilon)^2 \qquad (n \geqq n_4(\varepsilon);\ r = 1, \ldots, 2^n).$$

Folglich gibt es ein $n_5(\varepsilon) \geqq n_4(\varepsilon)$, so daß

$$(1.18) \qquad \int_0^\xi \chi_{\hat{C}^{(n)}}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \geqq \{(\gamma - \varepsilon)(1 - \varepsilon)^2 - \varepsilon\} \int_0^\xi f(\zeta)\, d\zeta$$
$$(n \geqq n_5(\varepsilon);\ 0 \leqq \xi \leqq x).$$

Nun ist aber für alle n die Summenmenge $C = \sum_{\lambda=1}^{l} A_\lambda \geqq \sum_{\lambda=1}^{l} \hat{A}_\lambda^{(n)} = \hat{C}^{(n)}$, also

$$(1.19) \qquad \int_0^\xi \chi_C(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \geqq \{(\gamma - \varepsilon)(1 - \varepsilon)^2 - \varepsilon\} \int_0^\xi f(\zeta)\, d\zeta$$

in $0 \leqq \xi \leqq x$, und da die Integrale auf beiden Seiten nicht von ε abhängen, folgt mit $\varepsilon \to 0$ die Behauptung (1. 3) für den ersten Schritt.

Zweiter Schritt. Alle Mengen A_λ seien perfekte Mengen. Sie besitzen also eine Darstellung

$$A_\lambda = [0, x] - \bigcup_{\tau=1}^{\infty} I_\tau^{(\lambda)};\ I_{\tau_1}^{(\lambda)} \underset{\tau_1 \neq \tau_2}{\cap} I_{\tau_2}^{(\lambda)} = \emptyset; \qquad (\lambda = 1, \ldots, l),$$

wobei das Minuszeichen die mengentheoretische Differenz und die $I_\tau^{(\lambda)}$ offene Intervalle bedeuten. Ab einem gewissen Index können die $I_\tau^{(\lambda)}$ auch leer sein.

Wir setzen $A_\lambda^{(n)} = [0, x] - \bigcup_{\tau=1}^{n} I_\tau^{(\lambda)}$ $\quad (\lambda = 1, \ldots, l)$.

Dann ist $A_\lambda^{(n)} \geqq A_\lambda$ und $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} A_\lambda^{(n)} = A_\lambda$. Nach Voraussetzung (1. 2) ergibt sich

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \int_0^\xi \chi_{A_\lambda^{(n)}}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \geqq \gamma \int_0^\xi f(\zeta)\, d\zeta \qquad (0 \leqq \xi \leqq x).$$

Die $A_\lambda^{(n)}$ sind Vereinigungen endlich vieler abgeschlossener Intervalle, also von der Art, wie sie im ersten Teil des Beweises untersucht wurden; daher ist nach (1. 3), angewandt auf $C^{(n)} = \sum_{\lambda=1}^{l} A_\lambda^{(n)}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$(1.20) \qquad \int_0^\xi \chi_{C^{(n)}}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \geqq \gamma \int_0^\xi f(\zeta)\, d\zeta \qquad (0 \leqq \xi \leqq x)$$

richtig. Sicher gilt ferner $C^{(n)} \geqq C$; genauer ergibt sich (vgl. [21]):

Lemma 3. *Es ist* $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} C^{(n)} = C$.

Beweis. Es genügt zu zeigen $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} C^{(n)} \leqq C$. Die $C^{(n)}$ bilden eine nicht wachsende Mengenfolge, also ist $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} C^{(n)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^{(n)}$. Sei $c^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C^{(n)}$; dann gibt es zu jedem n eine Darstellung $c^* = \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda^{(n)}$, $a_\lambda^{(n)} \in A_\lambda^{(n)}$. Aus der Folge $\{a_1^{(n)}\}$ läßt sich wegen ihrer Beschränkt-

heit eine konvergente Teilfolge $\{a_1^{(n_i)}\} \to a_1^*$ auswählen, dann aus $\{a_2^{(n_i)}\}$ eine Teilfolge $\{a_2^{(n_{ij})}\} \to a_2^*$, usw.; nach l Schritten erhält man l konvergente Folgen $\{a_\lambda^{(m_\tau)}\} \to a_\lambda^*$. Jede Menge $A_\lambda^{(n)}$ ist perfekt, und $\operatorname{Lim}\limits_{\tau\to\infty} A_\lambda^{(m_\tau)} = A_\lambda$. Folglich gilt $a_\lambda^* \in A_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$, und da aus $c^* = \sum\limits_{\lambda=1}^{l} a_\lambda^{(m_\tau)}$ für $\tau \to \infty$ auch $c^* = \sum\limits_{\lambda=1}^{l} a_\lambda^*$ folgt, ist $c^* \in C$, d. h. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C^{(n)} \leqq C$.

Dritter Schritt. Nunmehr seien die A_λ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ beliebige lineare Mengen in $[0, x]$. Ähnlich wie bei Raikov folgt

Lemma 4. *Für jede Menge $M < [0, x]$ und jedes $\tau > 0$ gibt es eine perfekte Menge $P_M \leqq M$ mit*

$$(1.\,21)\qquad \int_0^\xi \chi_{P_M}(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta > \int_0^\xi \chi_M(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta - \tau \int_0^\xi f(\zeta)\, d\zeta \qquad (0 \leqq \xi \leqq x).$$

Beweis. Man zerlege $[0, x]$ in die Intervalle $\tilde{I}_n = \left(\frac{x}{2^{n+1}}, \frac{x}{2^n}\right)$ und betrachte die perfekten Mengen $P_M^{(n)} \leqq M \cap \tilde{I}_n$, deren Maß sich um weniger als $\frac{\tau x f(0)}{2^{n+2} f(x)}$ von $\underline{m}(M \cap \tilde{I}_n)$ unterscheidet. Dann setze man $P_M = \{0\} \cup \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} P_M^{(n)}$; diese Menge ist ebenfalls perfekt. Sei nun $\xi \in (0, x]$ und k durch $\frac{x}{2^{k+1}} \leqq \xi < \frac{x}{2^k}$ bestimmt. Es folgt

$$\int_0^\xi \chi_{P_M}(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{n=k+1}^{\infty} \int_{\frac{x}{2^{n+1}}}^{\frac{x}{2^n}} \chi_{P_M}(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta + \int_{\frac{x}{2^{k+1}}}^{\xi} \chi_{P_M}(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta$$

$$> \sum_{n=k+1}^{\infty} \left\{ \int_{\frac{x}{2^{n+1}}}^{\frac{x}{2^n}} \chi_M(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta - \frac{\tau x f(0)}{2^{n+2}} \right\} + \int_{\frac{x}{2^{k+1}}}^{\xi} \chi_M(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta - \frac{\tau x f(0)}{2^{k+2}}$$

$$= \int_0^\xi \chi_M(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta - \frac{\tau x f(0)}{2^{k+1}}.$$

Hieraus folgt (1. 21) wegen $\frac{x f(0)}{2^{k+1}} \leqq \xi f(0) \leqq \int_0^\xi f(\zeta)\, d\zeta$. Aus Lemma 4 ergibt sich nun für $M = A_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ und $\tau = \frac{\varepsilon}{l}$ bei gegebenem ε unter Beachtung von (1. 2)

$$(1.\,22)\qquad \sum_{\lambda=1}^{l} \int_0^\xi \chi_{P_{A_\lambda}}(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta > \sum_{\lambda=1}^{l} \int_0^\xi \chi_{A_\lambda}(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta - \varepsilon \int_0^\xi f(\zeta)\, d\zeta$$

$$\geqq (\gamma - \varepsilon) \int_0^\xi f(\zeta)\, d\zeta \qquad (0 \leqq \xi \leqq x).$$

Da die P_{A_λ} perfekte Mengen sind, folgt aus (1. 22) nach dem im zweiten Schritt schon bewiesenen Teil von (1. 3) mit

$$P = \sum_{\lambda=1}^{l} P_{A_\lambda} \leqq \sum_{\lambda=1}^{l} A_\lambda = C$$

$$\int_0^\xi \chi_C(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta \geqq \int_0^\xi \chi_P(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta \geqq (\gamma - \varepsilon) \int_0^\xi f(\zeta)\, d\zeta \qquad (0 \leqq \xi \leqq x),$$

und dies liefert für $\varepsilon \to 0$ die vollständige Behauptung (2. 3), und damit ist Satz 1 bewiesen.

5. *Spezialfälle.* Setzt man $f(\xi) \equiv 1$, so ergibt sich aus Satz 1:

Satz 2. *Ist* $0 \in \bigcap_{\lambda=1}^{l} A_\lambda$ *und* $C = \sum_{\lambda=1}^{l} A_\lambda$ *und gilt mit* $\gamma \leqq 1$

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \underline{m}_{A_\lambda}(\xi) \geqq \gamma\xi \qquad (0 \leqq \xi \leqq x),$$

dann ist auch

$$\underline{m}_C(\xi) \geqq \gamma\xi \qquad (0 \leqq \xi \leqq x).$$

Offenbar liefert Satz 2 die schärfste Aussage, wenn man für γ die Größe

$$\sigma_{A_1,\ldots,A_l}(x) = \operatorname*{fin}_{0<\xi<x} \frac{\sum_{\lambda=1}^{l} \underline{m}_{A_\lambda}(\xi)}{\xi}$$

setzt. Ist γ bzw. $\sigma_{A_1,\ldots,A_l}(x) > 1$, so ist wegen $\sum_{\lambda=1}^{l} \underline{m}_{A_\lambda}(\xi) \geqq 1 \cdot \xi$ die Voraussetzung von Satz 2 erfüllt und folglich, weil trivialerweise $\underline{m}_C(\xi) \leqq \xi$ ist, $\underline{m}_C(\xi) \equiv \xi$. Man kann Satz 2 also auch folgendermaßen formulieren:

Satz 3. *Ist* $0 \in \bigcap_{\lambda=1}^{l} A_\lambda$, *so ist*

$$\delta \sum_{\lambda=1}^{l} A_\lambda(x) \geqq \min(1, \sigma_{A_1,\ldots,A_l}(x)) \geqq \min(1, \sum_{\lambda=1}^{l} \delta_{A_\lambda}(x)).$$

Setzt man $l = 2$ und benutzt nur die schwächere Form der obigen Ungleichung, so erhält man das bereits von D. Raikov [22] erhaltene Ergebnis:

Satz 3'. *Ist* $0 \in A \cap B$, *dann gilt für jede positive Zahl* x

$$\delta_{A+B}(x) \geqq \min(1, \delta_A(x) + \delta_B(x)).$$

Selbstverständlich gelten alle diese Abschätzungen auch, wenn man $x = \infty$ setzt, also ξ in $0 < \xi < \infty$ variieren läßt und $\delta_A(x), \ldots$ durch $\delta(A), \ldots$ ersetzt. Setzen wir $\delta(A) = \alpha$, $\delta(B) = \beta$, $\delta(A + B) = \gamma$, so liefern also z. B. Satz 3' oder Satz 3

$$\gamma \geqq \min(1, \alpha + \beta)$$

$$\gamma \geqq \min(1, \sum_{\lambda=1}^{l} \alpha_\lambda).$$

Die letzte Ungleichung kann, wenn man nur die α_λ und nicht $\sigma(A_1, \ldots, A_l)$ zuläßt, nicht verschärft werden. Genauer gilt

Satz 4. *Zu jedem* $(l+1)$*-tupel reeller* $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$; $0 \leqq \alpha_\lambda$; γ *mit* $0 \leqq \sum_{\lambda=1}^{l} \alpha_\lambda \leqq \gamma \leqq 1$ *gibt es* l *Mengen* A_λ *nichtnegativer Zahlen derart daß*

$$\delta(A_\lambda) = \alpha_\lambda \; (\lambda = 1, \ldots, l), \quad \delta(\sum_{\lambda=1}^{l} A_\lambda) = \gamma \text{ ist.}$$

Beweis[2]). Es seien

$$\gamma = \alpha_1' + \alpha_2 + \cdots + \alpha_l = \alpha_1 + \alpha_2' + \cdots + \alpha_l = \cdots = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{l-1} + \alpha_l'$$

$(\alpha_\lambda' \geqq \alpha_\lambda)$. Dann definieren wir l Zahlenfolgen

[2]) Vgl. den analogen Fall für Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen und $l = 2$ bei *L. Cheo* [5].

$$(1.23)\qquad a_\lambda^{(n)} = \begin{cases} \alpha'_\lambda\{(n+1)! - n!\} = \alpha'_\lambda n \cdot n! & \text{für } n \equiv \lambda (\mathrm{mod}\ l) \\ \alpha_\lambda\{(n+1)! - n!\} = \alpha_\lambda n \cdot n! & \text{für } n \not\equiv \lambda (\mathrm{mod}\ l). \end{cases}$$

Folglich gilt stets

$$(1.24)\qquad \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda^{(n)} = \gamma n \cdot n!.$$

Die gesuchten Mengen A_λ definieren wir durch

$$A_1 = [0, \alpha'_1] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [n!, n! + a_1^{(n)}]$$

$$A_\lambda = [0, \alpha_\lambda] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [n!, n! + a_\lambda^{(n)}] \qquad (\lambda = 2, \ldots, l).$$

Die Funktionen $f_\lambda(\xi) = m_{A_\lambda}(\xi)/\xi$ haben die relativen Minima an den linken Intervallenden, also ist

$$\delta(A_\lambda) = \underset{n=1,2,\ldots}{\mathrm{fin}} \frac{m_{A_\lambda}(n!)}{n!} \qquad (\lambda = 1, \ldots, l).$$

Diese Berechnung gilt auch noch für den Fall $\alpha_\lambda = 0$, wo A_λ z. T. eine diskrete Punktmenge darstellt.

Es ist aber

$$\frac{(n-1)! + a_\lambda^{(n-1)}}{n!} \geqq \frac{m_{A_\lambda}(n!)}{n!} \geqq \frac{\alpha_\lambda + \sum_{\mu=1}^{n-1} a_\lambda^{(\mu)}}{n!} \geqq \frac{\alpha_\lambda + \sum_{\mu=1}^{n-1}\{(\mu+1)! - \mu!\}}{n!} = \alpha_\lambda.$$

Ferner strebt für $n \not\equiv \lambda$, $n \to \infty$ die linke Seite gegen α_λ, also ist $\delta(A_\lambda) = \alpha_\lambda$. Wir setzen $C = \sum_{\lambda=1}^{l} A_\lambda$ und wollen zeigen, daß $\delta(C) = \gamma$ ist. Zunächst ist für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$m_C(n!) \leqq l(n-1)! + \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda^{(n-1)},$$

also

$$\frac{m_C(n!)}{n!} \leqq \frac{l}{n} + \frac{\gamma(n-1)(n-1)!}{n!} = \gamma + \frac{1-\gamma}{n};$$

hieraus folgt

$$(1.25)\qquad \delta(C) \leqq \gamma.$$

Nach Konstruktion der Mengen A_λ hat $f(\xi) = \dfrac{\sum_{\lambda=1}^{l} m_{A_\lambda}(\xi)}{\xi}$ seine relativen Minima an den Stellen $n!$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Es ist aber

$$f(n!) = \frac{\sum_{\lambda=1}^{l} m_{A_\lambda}(n!)}{n!} = \frac{\alpha'_1 + \sum_{\lambda=2}^{l} \alpha_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{n-1} a_\lambda^{(\mu)}}{n!} = \frac{\gamma + \sum_{\mu=1}^{n-1} \gamma\{(\mu+1)! - \mu!\}}{n!} = \gamma,$$

also $\sigma(A_1, \ldots, A_l) = \gamma$. Nach Satz 3 folgt daraus $\delta(C) \geqq \gamma$, also mit (1.25) die Behauptung.

Wie man leicht sieht, gilt für diese Mengen

$$(1.26)\qquad \delta(A_\lambda) = \delta^*(A_\lambda);\ \delta(C) = \delta^*(C).$$

Das gleiche Ergebnis wie in Satz 4 erhält man, wenn man statt der Dichten die Abschnittsdichten vorgibt:

Satz 4'. *Zu jedem $(l+1)$-tupel reeller Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \gamma$ mit*

$$0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_l,\ 0 \leqq \sum_{\lambda=1} \alpha_\lambda \leqq \gamma \leqq 1$$

und zu jeder positiven Zahl x gibt es l Mengen A_λ reeller nichtnegativer Zahlen derart, daß

$$\delta_{A_\lambda}(x) = \alpha_\lambda,\ \delta\left(\sum_{\lambda=1}^{l} A_\lambda(x)\right) = \gamma \text{ ist.}$$

Beweis. Man kann o. B. d. A. $x = 1$ setzen; im anderen Falle betrachte man die Mengen, die durch die Transformation $\xi' = x\xi$ aus den genannten hervorgehen.

Wir setzen $A_\lambda = [0, \alpha_\lambda]$ $(\lambda = 1, \ldots, l-1)$. Die Menge A_l dagegen bestehe aus $[0, \alpha_l]$ und den Punkten

$$\varrho, \varrho + \alpha_{l-1},\ \varrho + 2 \cdot \alpha_{l-1},\ \ldots,\ \varrho + k \cdot \alpha_{l-1},$$

wobei k als natürliche Zahl und ϱ als reelle Zahl durch

$$\gamma - \sum_{\lambda=1}^{l-1} \alpha_\lambda = k\alpha_{l-1} + \varrho,\ 0 \leqq \varrho < \alpha_{l-1}$$

festgelegt sind. Da die diskreten Punkte am Maße nichts ändern, gilt $\delta_{A_\lambda}(1) = \alpha_\lambda$ für $\lambda = 1, \ldots, l$. Ferner ist

$$\begin{aligned} C = \sum_{\lambda=1}^{l} A_\lambda &= [0, \sum_{\lambda=1}^{l} \alpha_\lambda] \cup \left\{\{\varrho\} + \sum_{\lambda=1}^{l-1} A_\lambda\right\} \cup \left\{\{\varrho + \alpha_{l-1}\} + \sum_{\lambda=1}^{-1} A_\lambda\right\} \\ &\quad \cup \cdots \cup \left\{\{\varrho + k \cdot \alpha_{l-1}\} + \sum_{\lambda=1}^{l-1} A_\lambda\right\} \\ &= \left[0, \sum_{\lambda=1}^{l} \alpha_\lambda\right] \cup \left[\varrho, \varrho + \sum_{\lambda=1}^{l-1} \alpha_\lambda\right] \cup \left[\varrho + \alpha_{l-1}, \varrho + \alpha_{l-1} + \sum_{\lambda=1}^{l-1} \alpha_\lambda\right] \\ &\quad \cup \cdots \cup \left[\varrho + k \cdot \alpha_{l-1},\ \varrho + k \cdot \alpha_{l-1} + \sum_{\lambda=1}^{l-1} \alpha_\lambda\right] = [0, \gamma]. \end{aligned}$$

Das bedeutet $\delta_C(1) = \gamma$, und damit ist Satz 4' bewiesen.

Auch aus dieser Konstruktion der Mengen A_λ läßt sich durch sinngemäße Erweiterung ein Beispiel im Sinne von Satz 4 bilden.

§ 2. Asymptotische Dichte.

6. *Der allgemeine Satz.* Wir betrachten wiederum l Mengen A_λ $(l \geqq 2)$ aus nichtnegativen reellen Zahlen. Es soll die asymptotische Dichte der Summenmenge nach unten abgeschätzt werden. Dabei verzichten wir auf eine Durchführung mit Gewichtsfunktionen. Eine allgemeine Übertragung von Satz 1 auf asymptotische Verhältnisse läßt sich mit den gleichen Methoden nicht ohne weiteres durchführen.

Satz 5. *Es seien die A_λ beliebige Mengen in $[0, \infty)$. Für $\xi \geqq \xi_0$ gelte*

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \underline{m}_{A_\lambda}(\xi) \geqq \gamma^* \xi \qquad (\gamma^* \leqq 1). \tag{2.1}$$

Sei $C = \sum_{\lambda=1} A_\lambda$; dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\xi^*(\varepsilon)$ mit

$$\underline{m}_C(\xi) \geqq (\gamma^* - \varepsilon)\, \xi \quad \textit{für } \xi \geqq \xi^*(\varepsilon). \tag{2.2}$$

Auch hier gehen wir beim *Beweis* in drei Schritten vor, wobei im ersten Schritt eine Zurückführung auf den finiten Fall gelingt. Diese Zurückführung geschieht auf eine ähnliche Weise, wie sie H. N. Shapiro [25] zu einer asymptotischen Abschätzung für Mengen natürlicher Zahlen verwendete[3]).

Erster Schritt. Jede Menge A_λ bestehe aus zueinander fremden, abgeschlossenen Intervallen, die sich nicht im Endlichen häufen:

$$A_\lambda = \bigcup_{\tau=1}^{\infty} J_\tau^{(\lambda)};\ J_\tau^{(\lambda)} = [a_\tau^{(\lambda)}, b_\tau^{(\lambda)}];\ 0 \leqq a_1^{(\lambda)} < b_1^{(\lambda)} < \cdots \qquad (\lambda = 1, \ldots, l).$$

Die Funktionen $f_\lambda(\xi) = m_{A_\lambda}(\xi)/\xi$ sind stückweise stetig differenzierbare Funktionen, ebenso $f(\xi) = \sum_{\lambda=1}^{l} f_\lambda(\xi) = \sum_{\lambda=1}^{l} m_{A_\lambda}(\xi)/\xi$.

Eine Zahl ξ liegt genau dann in A_λ, wenn $f_\lambda(\xi)$ wenigstens links- oder rechtsseitigen nichtnegativen Anstieg besitzt. Ist also wenigstens $f'(\xi + 0) \geqq 0$ oder $f'(\xi - 0) \geqq 0$, so ist auch ein $f'_\lambda(\xi + 0) \geqq 0$ oder $f'_\lambda(\xi - 0) \geqq 0$, also $\xi \in \bigcup_{\lambda=1}^{l} A_\lambda$. Durch evtl. Wegnahme eines gewissen Anfangsstückes der Mengen A_λ kann man stets erreichen, daß $f(\xi) \equiv 0$ für $\xi \leqq 1$ ist. Setzen wir $\gamma_1^* = \gamma^* - \eta$, $\eta > 0$, so sei ξ_1^* die kleinste der Zahlen ξ_0 mit der Eigenschaft $f(\xi) \geqq \gamma_1^*$ für $\xi \geqq \xi_0$. Es ist $\xi_1^* > 0$. Wegen der Stetigkeit von $f(\xi)$ folgt

$$f(\xi_1^*) = \gamma_1^*. \tag{2.3}$$

Ferner gibt es eine ε_0-Umgebung von ξ_1^*, daß $f(\xi_1^* - \varepsilon) < f(\xi_1^*)$ ist für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Daraus folgt $\xi_1^* \in \bigcup_{\lambda=1}^{l} A_\lambda$.

Wir können o. B. d. A. annehmen, daß

$$\xi_1^* \in A_1. \tag{2.4}$$

Dann setzen wir

$$\xi_\lambda^* = \min \xi, \text{ wo } \xi \geqq \xi_1^*,\ \xi \in A_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, l). \tag{2.5}$$

Da die A_λ aus abgeschlossenen Intervallen bestehen, wird das Minimum auch angenommen, also ist

$$\xi_\lambda^* \in A_\lambda. \tag{2.4'}$$

Ferner ist

$$m_{A_\lambda}(\xi_\lambda^*) = m_{A_\lambda}(\xi_1^*) \qquad (\lambda = 1, \ldots, l). \tag{2.6}$$

[3]) Den Hinweis auf die Arbeit von Shapiro verdanke ich Herrn Dr. Kasch.

Nunmehr wird jede Menge A_λ um ξ_λ^* nach links verschoben:

$$(2.\,7) \qquad A_\lambda^* = \{a_\lambda - \xi_\lambda^*\} \cap [0, \infty), \; a_\lambda \in A_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, l).$$

Wegen (2. 4) und (2. 4′) ist

$$(2.\,8) \qquad 0 \in A_\lambda^* \qquad (\lambda = 1, \ldots, l),$$

ferner wegen (2. 6), (2. 5) und (2. 3), sowie (2. 1)

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=1}^{l} m_{A_\lambda^*}(\xi) &= \sum_{\lambda=1}^{l} m_{A_\lambda}(\xi + \xi_\lambda^*) - \sum_{\lambda=1}^{l} m_{A_\lambda}(\xi_\lambda^*) \\ &= \sum_{\lambda=1}^{l} m_{A_\lambda}(\xi + \xi_\lambda^*) - \sum_{\lambda=1}^{l} m_{A_\lambda}(\xi_1^*) \geqq \sum_{\lambda=1}^{l} m_{A_\lambda}(\xi + \xi_1^*) - \gamma_1^* \xi_1^* \geqq \gamma_1^*(\xi + \xi_1^*) - \gamma_1^* \xi_1^* \\ &= \gamma_1^* \xi \qquad (\xi \geqq 0).\end{aligned}$$

Für die Mengen A_λ^* sind also die Bedingungen des finiten Satzes 2 erfüllt. Setzt man demnach $C^* = \sum_{\lambda=1}^{l} A_\lambda^*$, so gilt

$$(2.\,9) \qquad \underline{m}_{C^*}(\xi) \geqq \gamma_1^* \xi \qquad (\xi \geqq 0).$$

Aus welchen Zahlen setzt sich aber C^* zusammen? Es ist

$$C^* = \{c^*\} = \left\{\sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda^*\right\} = \left\{\sum_{\lambda=1}^{l} (a_\lambda - \xi_\lambda^*)\right\} = \left\{\sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda - \sum_{\lambda=1}^{l} \xi_\lambda^*\right\} \text{ für } a_\lambda \geqq \xi_\lambda^*.$$

Wir bilden nun aus C^* die Menge C^{**}, indem wir C^* um $\sum_{\lambda=1}^{l} \xi_\lambda^*$ nach rechts verschieben. Es entsteht die Menge

$$C^{**} = \left\{\sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda;\, a_\lambda \geqq \xi_\lambda^*\right\} \leqq C.$$

Das Maß von C^{**} läßt sich aber durch dasjenige von C^* nach unten abschätzen, denn wegen (2 9) ist

$$m_{C^{**}}(\xi) = m_{C^*}(\xi - \sum_{\lambda=1}^{l} \xi_\lambda^*) \geqq \gamma_1^*(\xi - \sum_{\lambda=1}^{l} \xi_\lambda^*) \geqq (\gamma^* - \varepsilon)\, \xi \text{ für } \xi \geqq \xi^*(\varepsilon).$$

Da $C \geqq C^{**}$ ist, ist damit der erste Teil bewiesen.

Zweiter Schritt. Es seien die A_λ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ perfekte Mengen in $[0, \infty)$. Für $k = 0, 1, 2, \ldots$ gilt dies auch für $A_\lambda \cap [k, k+1]$, und es gibt eine Darstellung

$$A_{\lambda,k} = A_\lambda \cap [k, k+1] = [k, k+1] - \bigcup_{\tau=1}^{\infty} I_\tau^{(\lambda)},$$

$I_\tau^{(\lambda)}$ offen, $I_{\tau_1}^{(\lambda)} \cap I_{\tau_2}^{(\lambda)} = \emptyset$ $(\tau_1 \neq \tau_2)$. Wir setzen

$$A_{\lambda,k,n} = [k, k+1] - \bigcup_{\tau=1}^{n} I_\tau^{(\lambda)}.$$

Dann ist $A_{\lambda,k,n} \geqq A_{\lambda,k}$; $\lim_{n\to\infty} A_{\lambda,k,n} = A_{\lambda,k}$; $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_{\lambda,k} = A_\lambda$.

Mit (2. 1) folgt

$$\sum_{\lambda=1}^{l} m\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty} A_{\lambda,k,n} \cap [0,\xi]\right\} \geqq \sum_{\lambda=1}^{l} m\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty} A_{\lambda,k} \cap [0,\xi]\right\} = \sum_{\lambda=1}^{l} m_{A_\lambda}(\xi) \geqq \gamma^*\xi \qquad (\xi \geqq \xi_0).$$

Daher gilt, wenn wir $A_{\lambda,n} = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{\lambda,k,n}$ und $C_n = \sum_{\lambda=1}^{l} A_{\lambda,n}$ setzen, nach dem bereits bewiesenen ersten Schritt von Satz 5:

$$m_{C_n}(\xi) \geqq (\gamma^* - \varepsilon)\,\xi \text{ für } \xi \geqq \xi^*(\varepsilon). \tag{2. 10}$$

ε sei fest vorgegeben und $\xi \geqq \xi^*(\varepsilon)$. Dann gilt nach Lemma 3

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} C_n \cap [0,\xi] = C \cap [0,\xi] \text{ mit } C = \sum_{\lambda=1}^{l} A_\lambda.$$

Also folgt aus (2. 10) für $n \to \infty$ auch

$$m_C(\xi) \geqq (\gamma^* - \varepsilon)\,\xi \text{ für } \xi \geqq \xi^*(\varepsilon),$$

und damit ist der zweite Schritt bewiesen.

Dritter Schritt. Die A_λ seien beliebige Mengen in $[0,\infty)$.

Lemma 5. *Zu vorgegebenem $\varepsilon_1 > 0$ gibt es perfekte Teilmengen $P_\lambda \leqq A_\lambda$, so daß für $\xi \geqq \xi_6(\varepsilon_1)$*

$$\sum_{\lambda=1}^{l} m_{P_\lambda}(\xi) \geqq \sum_{\lambda=1}^{l} \underline{m}_{A_\lambda}(\xi) - \varepsilon_1\xi \text{ ist.} \tag{2. 11}$$

Beweis. Für jedes $\eta > 0$ gibt es zu $A_{\lambda,k} = A_\lambda \cap [k, k+1]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ perfekte Teilmengen $P_{\lambda,k} \leqq A_{\lambda,k}$, so daß

$$m(P_{\lambda,k}) > \underline{m}(A_{\lambda,k}) - \eta \tag{2. 12}$$

ist.

Die Mengen $P_\lambda = \bigcup_{k=0}^{\infty} P_{\lambda,k}$ erfüllen für genügend große ξ die Ungleichung (2. 11), wenn man etwa $\eta = \varepsilon_1/l + 1$ setzt. Bei vorgegebenem ε wählen wir die P_λ nach Lemma 5 so, daß $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ ist Mit (2. 1) ergibt dies

$$\sum_{\lambda=1}^{l} m_{P_\lambda}(\xi) \geqq (\gamma^* - \varepsilon/2)\,\xi \qquad (\xi \geqq \xi_7(\varepsilon)), \tag{2. 13}$$

und wegen $\sum_{\lambda=1}^{l} A_\lambda \geqq \sum_{\lambda=1}^{l} P_\lambda$ liefert dies die Behauptung des Satzes.

7. *Bemerkungen.* Offenbar erhält man in Satz 5 die schärfsten Aussagen, wenn man $\gamma^* = \sigma^*(A_1, \ldots, A_l)$ setzt. Es gilt also

Satz 6. *Für l beliebige Mengen $A_\lambda \leqq [0,\infty)$ gilt*

$$\delta^*(C) = \delta^*\left(\sum_{\lambda=1}^{l} A_\lambda\right) \geqq \min\left(1, \sigma^*(A_1, \ldots, A_l)\right) \geqq \min\left(1, \sum_{\lambda=1}^{l} \delta^*(A_\lambda)\right).$$

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, gilt dieses Ergebnis also in der gleichen Form wie für die finiten Dichten, im Gegensatz zu den Mengen natürlicher Zahlen.

Der obige Satz läßt sich als Relation zwischen den Dichten $\delta^*(A_\lambda)$ nicht verschärfen, denn es gilt

Satz 7. *Zu jedem $(l+1)$-tupel reeller Zahlen*

$$0 \leqq \alpha_\lambda^*, \gamma^* \ (\lambda = 1, \ldots, l), \ 0 \leqq \sum_{\lambda=1}^{l} \alpha_\lambda^* \leqq \gamma^* \leqq 1$$

gibt es l Mengen reeller nichtnegativer Zahlen mit

$$\delta^*(A_\lambda) = \alpha_\lambda^* \ (\lambda = 1, \ldots, l); \ \delta^*\left(\sum_{\lambda=1} A_\lambda\right) = \gamma^*.$$

Dieser Satz bedarf keines Beweises mehr, denn nach (1. 26) stimmen bei den in Satz 4 konstruierten Mengen finite und asymptotische Dichten überein.

8. *Äußere Dichte.* An Stelle des inneren L.-Maßes könnte man zunächst auch das äußere Maß zur Dichtedefinition heranziehen [12]. Dann sind aber keine entsprechend einfachen Aussagen zu erwarten. Von C. Burstin [3] wurde die Existenz Hamelscher Basen mit positivem äußerem L.-Maß nachgewiesen.

Schränkt man jedoch die Voraussetzungen etwas ein, so kann man leicht beweisen, daß die entsprechende Dichteabschätzung gilt, wenn man wenigstens eine der Summandenmengen als offene Menge voraussetzt.

II. BASEN UND WESENTLICHE KOMPONENTEN.

§ 3. Definitionen.

9. *Basis und Ordnung.* In der additiven Zahlentheorie spielen die Begriffe Basis und wesentliche Komponente eine große Rolle. Von D. Raikov übernehmen wir die entsprechenden Begriffe für lineare Punktmengen.

B und M seien Mengen aus nichtnegativen Zahlen. B heißt *Basis der Ordnung h für M*, wenn sich jede Zahl aus M als Summe von höchstens h Summanden aus B darstellen läßt. Es sei $h(\xi)$ die kleinste Anzahl von Summanden, welche zur Darstellung von $\xi \in M$ benötigt wird. Die natürliche Zahl

$$h_B(M) = \max h(\xi) \text{ für } \xi \in M \tag{3. 1}$$

heißt die *genaue Ordnung* von B für M. Auf Grund der Summendefinition (E. 11) von Nr. 2 ist also

$$h_B(M)\, B \geqq M, \text{ aber } (h_B(M) - 1)\, B \not\geqq M. \tag{3. 2}$$

Von besonderer Bedeutung sind die beiden Spezialfälle $M = Z$ (Z = Menge der nichtnegativen reellen Zahlen) und $M = [0, x]$, wobei x irgendeine positive reelle Zahl bedeutet. Hiermit folgt nach Satz 3, indem man dort $A_\lambda = A$ setzt für $\lambda = 1, \ldots, l$, daß jede die 0 enthaltende Menge A positiver Dichte α eine Basis der Ordnung $[1/\alpha] + 1$ für Z ist.

Es ist interessant zu vermerken, daß wir für unsere Untersuchungen mit einem schwächeren Begriff auskommen [21]. Eine Menge B aus nichtnegativen Zahlen heißt *schwache Basis für M*, wenn die Menge der Zahlen aus M, die sich als endliche Summe von Zahlen aus B darstellen lassen, in M überall dicht ist. B heißt *schwache Basis*

h-ter Ordnung für M, wenn hB in M überall dicht liegt, und schwache Basis *genau h-ter Ordnung* für M, wenn hB in M überall dicht liegt, dies aber nicht mehr für $(h-1)B$ gilt.

Im folgenden sei $M = [0, x]$ oder $M = Z$. B sei eine schwache Basis h-ter Ordnung für M, $0 \in B$. Wir setzen

$$\widetilde{B} = \bigcup_{k=1}^{h} kB. \tag{3.3}$$

Für $\xi \in \widetilde{B}$ sei $h(\xi)$ wie oben erklärt. Für beliebiges ξ setze man

$$l(\xi) = \varliminf_{\tau \to \xi} h(\tau), \qquad \tau \in \widetilde{B}. \tag{3.4}$$

$l(\xi)$ ist eine Lebesgues-integrierbare Funktion. Denn sei $R_k = \{\xi; l(\xi) = k\}$, dann ist $S_k = \bigcup_{\varkappa=1}^{k} R_\varkappa$ abgeschlossen, also meßbar, und ebenso jedes $R_k (k = 1, \ldots, h)$ als Differenz der meßbaren Mengen $S_k - S_{k-1}$, so daß

$$\int_0^x l(\xi)\, d\xi = \sum_{k=1}^{h} k \int_{\xi \in R_k} d\xi = \sum_{k=1}^{h} k m(R_k).$$

Als die *mittlere Ordnung in* $[0, x]$ einer schwachen Basis B bezeichnen wir die Größe

$$\lambda_B(x) = \varliminf_{0 < y < x} \frac{1}{y} \int_0^y l(\xi)\, d\xi, \tag{3.5}$$

als die *mittlere Ordnung* von B (in Z)

$$\lambda(B) = \varliminf_{0 < y < \infty} \frac{1}{y} \int_0^y l(\xi)\, d\xi. \tag{3.6}$$

Genau wie bei Mengen natürlicher Zahlen zeigt man leicht, daß, wenn h die genaue Ordnung von B ist, die Beziehungen gelten

$$\frac{h}{2} \leqq \lambda_B(x) \leqq h \quad \text{bzw.} \quad \frac{h}{2} \leqq \lambda(B) \leqq h. \tag{3.7}$$

10. *Wesentliche Komponenten.* Eine Menge K heißt eine *wesentliche Komponente*, wenn für jede Menge A mit $\delta(A) = \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ gilt:

$$\delta(A + K) > \delta(A).$$

Für Mengen natürlicher Zahlen zeigte A. J. Chintschin [6], daß die Menge der Quadratzahlen eine wesentliche Komponente darstellt. P. Erdös wies nach [9], daß allgemein jede Basis endlicher Ordnung eine wesentliche Komponente ist. E. Landau zeigte [17]

$$\gamma \geqq \alpha \left(1 + \frac{1-\alpha}{2 \cdot \lambda}\right), \tag{3.8}$$

wo $\mathfrak{A}$ eine Menge der Dichte α, $\mathfrak{B}$ eine Basis der mittleren Ordnung λ ist.

Eine Vermutung von P. Erdös besagt, daß man in der Abschätzung von E. Landau 2λ durch λ ersetzen dürfe. Die zur Zeit besten Abschätzungen in dieser Richtung stammen von F. Kasch ([13] und [14]). Er bewies

$$(3.9)\quad \begin{cases} \gamma \geqq \alpha\left(1 + c_1(\alpha)\dfrac{1-\alpha}{\lambda}\right); \; c_1(\alpha) = \dfrac{1+\sqrt{\alpha}+\alpha}{(1+\sqrt{\alpha})^2}, \\ \gamma \geqq \alpha\left(1 + c_1(1-\alpha)\dfrac{1-\alpha}{\lambda}\right), \\ \gamma \geqq \alpha + c_1(\gamma)\dfrac{\gamma(1-\gamma)}{\lambda}, \\ \gamma \geqq \alpha + c_1(1-\gamma)\dfrac{\gamma(1-\gamma)}{\lambda}. \end{cases}$$

Ferner konnte F. Kasch zeigen: Zu jedem λ gibt es ein α_λ derart, daß für $0 < \alpha < \alpha_\lambda$ die Erdössche Vermutung sogar übertroffen wird.

Von D. Raikov wurde in der bereits mehrfach zitierten Arbeit [21] bewiesen, daß die Entsprechung zu (4. 8) auch für lineare Punktmengen gilt. In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß sich auch die Arbeiten von F. Kasch auf lineare Punktmengen übertragen lassen.

§ 4. Die beiden Grundformeln.

11. *Formulierung und Hilfssätze.* Ausgangspunkt für alle Abschätzungen bilden bei F. Kasch ([13] und [14]) zwei Grundformeln, die wir zunächst auch in unserem Falle herleiten.

Satz 8. *Es sei A eine meßbare Menge in $[0, x]$, B eine schwache Basis für $[0, x]$ mit der mittleren Ordnung $\lambda_B(x) = \lambda$, $0 \in B$, $C = A + B$ und P und Q zwei meßbare Mengen mit $A \leqq P \leqq Q \leqq C$. Dann gelten die im folgenden als Grundformeln bezeichneten Abschätzungen:*

$$(4.1)\quad \lambda k\,\{\underline{m}_C(x) - m_A(x)\} - k\,\{m_Q(x) - m_P(x)\}$$
$$\geqq \int_{x-k}^{x} m_P(\xi)\,d\xi + \int_0^{x-k} m_P(\xi)\,\chi_Q(\xi+k)\,d\xi - \frac{m_P^2(x)}{2}$$
$$-\{m_Q(x) - m_P(x)\}\,m_P(x); \qquad (0 \leqq k \leqq x).$$

$$(4.2)\quad \lambda k\,\{\underline{m}_C(x) - m_A(x)\} - k\,\{m_Q(x) - m_P(x)\}$$
$$\geqq k m_{\bar{Q}}(x) - \int_0^{k} m_{\bar{Q}}(\xi)\,d\xi + \int_0^{x-k} m_{\bar{P}}(\xi)\,\chi_{\bar{Q}}(\xi+k)\,d\xi - \frac{m_{\bar{Q}}^2(x)}{2}$$
$$-\{m_{\bar{P}}(x) - m_{\bar{Q}}(x)\}\,m_{\bar{Q}}(x); \qquad (0 \leqq k \leqq x).$$

Für den Beweis von Satz 8 müssen einige Hilfssätze vorausgeschickt werden. Wir setzen mit den charakteristischen Funktionen $\chi_M(\xi)$ einer linearen Menge M für $0 \leqq m \leqq x$

$$D(m) = \int_0^{x-m} \chi_P(\xi)\,\chi_{\bar{Q}}(\xi+m)\,d\xi = \int_m^{x} \chi_{\bar{Q}}(\xi)\,\chi_P(\xi-m)\,d\xi,$$

$$E(m) = \int_0^{x-m} \chi_P(\xi)\,\chi_Q(\xi+m)\,d\xi,$$

$$\bar{E}(m) = \int_0^{x-m} \chi_{\bar{P}}(\xi)\,\chi_{\bar{Q}}(\xi+m)\,d\xi = \int_m^{x} \chi_{\bar{Q}}(\xi)\,\chi_{\bar{P}}(\xi-m)\,d\xi,$$

wobei allgemein mit $\overline{M}$ die zu M in bezug auf $[0, x]$ komplementäre Menge bezeichnet wird. Dann ist wegen

$$\chi_M(\xi) + \chi_{\overline{M}}(\xi) \equiv 1 \tag{4.3}$$

$D(m) + E(m) = m_P(x - m)$ und $D(m) + E(m) = m_{\overline{Q}}(x) - m_{\overline{Q}}(m)$, also

$$D(m) = m_P(x - m) - E(m), \tag{4.4}$$

$$D(m) = m_{\overline{Q}}(x) - m_{\overline{Q}}(m) - E(m). \tag{4.5}$$

Lemma 6. *Für $0 \leqq t \leqq m$ ist $D(m) \leqq D(t) + D(m - t) + m_Q(x) - m_P(x)$.*

Beweis. Durch zweimalige Anwendung von (4.3) folgt

$$\begin{aligned} D(m) &= \int_0^{x-m} \chi_P(\xi)\, \chi_{\overline{Q}}(\xi + m)\, \chi_{\overline{Q}}(\xi + t)\, d\xi \\ &\quad + \int_0^{x-m} \chi_P(\xi)\, \chi_{\overline{Q}}(\xi + m)\, \chi_P(\xi + t)\, \chi_Q(\xi + t)\, d\xi \\ &\quad + \int_0^{x-m} \chi_P(\xi)\, \chi_{\overline{Q}}(\xi + m)\, \chi_{\overline{P}}(\xi + t)\, \chi_Q(\xi + t)\, d\xi \\ &\leqq D(t) + \int_0^{x-(m-t)} \chi_P(\tau)\, \chi_{\overline{Q}}(\tau + m - t)\, d\tau + \int_0^x \chi_{\overline{P}}(\tau)\, \chi_Q(\tau)\, d\tau \\ &= D(t) + D(m - t) + \{m_Q(x) - m_P(x)\}. \end{aligned}$$

Bei dieser Abschätzung sind geeignete Faktoren $\chi_M(\xi)$ durch 1 ersetzt, an passender Stelle die Substitution $\xi + t = \tau$ vorgenommen und die Relation $\chi_{\overline{P}}(\tau) = 1 - \chi_P(\tau)$ sowie die Voraussetzung $P \leq Q$ benutzt worden.

Lemma 7. *Für $b \in B$ ist $D(b) \leqq \underline{m}_C(x) - m_Q(x) + m_P(x) - m_A(x)$.*

Beweis. Ähnlich wie beim Beweis von Lemma 6 ergibt sich wegen $A \leqq P$

$$D(b) = \int_0^{x-b} \chi_A(\xi)\, \chi_{\overline{Q}}(\xi + b)\, d\xi + \int_0^{x-b} \chi_{\overline{A}}(\xi)\, \chi_P(\xi)\, \chi_{\overline{Q}}(\xi + b)\, d\xi.$$

Für das erste Integral folgt, da für $\xi \notin A$ der Integrand verschwindet, für $\xi \in A$, $b \in B$ aber $\xi + b \in C$, also $\chi_C(\xi + b) = 1$ ist,

$$\begin{aligned} \int_0^{x-b} \chi_A(\xi)\, \chi_{\overline{Q}}(\xi + b)\, d\xi &= \int_0^{x-b} \chi_A(\xi)\, \chi_{\overline{Q}}(\xi + b)\, \chi_C(\xi + b)\, d\xi \\ &\leqq \int_0^{x-b} \chi_{\overline{Q}}(\xi + b)\, \chi_C(\xi + b)\, d\xi = \int_b^x \chi_{\overline{Q}}(\tau)\, \chi_C(\tau)\, d\tau \\ &\leqq \int_0^x \chi_C(\tau)\, d\tau - \int_0^x \chi_Q(\tau)\, \chi_C(\tau)\, d\tau = \underline{m}_C(x) - m_Q(x); \end{aligned}$$

für das zweite Integral ergibt sich

$$\int_0^{x-b} \chi_{\overline{A}}(\xi)\, \chi_P(\xi)\, \chi_{\overline{Q}}(\xi + b)\, d\xi \leqq \int_0^x \chi_{\overline{A}}(\xi)\, \chi_P(\xi)\, d\xi = m_P(x) - m_A(x).$$

Beides zusammen ergibt die Behauptung.

Lemma 8. *$D(m)$ ist eine stetige Funktion von m.*

Beweis. Eine leichte Abschätzung ergibt

$$\begin{aligned} |D(m+\varepsilon) - D(m)| &\leqq \int_{x-m-\varepsilon}^{x-m} \chi_P(\xi)\, \chi_{\bar{Q}}(\xi+m)\, d\xi \\ &\quad + \int_0^{x-m-\varepsilon} \chi_P(\xi)\, |\chi_{\bar{Q}}(\xi+m-\varepsilon) - \chi_{\bar{Q}}(\xi+m)|\, d\xi \\ &\leqq \varepsilon + \int_0^x |\chi_{\bar{Q}}(\xi+m+\varepsilon) - \chi_{\bar{Q}}(\xi+m)|\, d\xi. \end{aligned}$$

$\chi_{\bar{Q}}(\xi)$ ist in $[0, x]$ eine integrierbare Funktion, folglich ist das letzte Integral $o(1)$ für $\varepsilon \to 0$. Damit ist Lemma 8 bewiesen.

12. *Beweis von Satz* 8. Es sei nun $m \in \widetilde{B} = \bigcup_{k=1}^{h} k \cdot B$ und $m = \sum_{\lambda=1}^{h(m)} b_\lambda$ eine nach Voraussetzung existierende Darstellung. Durch mehrmalige Anwendung von Lemma 6 und Lemma 7 ergibt sich:

$$\begin{aligned} D(m) &\leqq \sum_{\lambda=1}^{h(m)} D(b_\lambda) + (h(m)-1)\{m_Q(x) - m_P(x)\} \\ &\leqq h(m)\{\underline{m}_C(x) + m_P(x) - m_Q(x) - m_A(x)\} + (h(m)-1)\{m_Q(x) - m_P(x)\} \\ &= h(m)\{\underline{m}_C(x) - m_A(x)\} - \{m_Q(x) - m_P(x)\}. \end{aligned}$$

Sei nun $\xi \in [0, x]$ beliebig. Dann gibt es nach (3. 4) eine Folge $u_n \to \xi$ $(u_n \in \widetilde{B})$, so daß $h(u_n) = l(\xi)$ ist. Folglich wird

$$D(u_n) \leqq l(\xi)\{\underline{m}_C(x) - m_A(x)\} - \{m_Q(x) - m_P(x)\}.$$

Wegen der Stetigkeit von $D(m)$ gilt dann auch

$$(4.\,6) \quad D(\xi) \leqq l(\xi)\{\underline{m}_C(x) - m_A(x)\} - \{m_Q(x) - m_P(x)\};\ (0 \leqq \xi \leqq x).$$

Sei k mit $0 \leqq k \leqq x$ eine beliebige Zahl. Dann integriere man (4. 6) von 0 bis k:

$$\int_0^k D(\xi)\, d\xi \leqq \{\underline{m}_C(x) - m_A(x)\} \int_0^k l(\xi)\, d\xi - k\{m_Q(x) - m_P(x)\}.$$

Nach (3 5) ist also

$$(4.\,7) \quad \int_0^k D(\xi)\, d\xi \leqq \lambda k\{\underline{m}_C(x) - m_A(x)\} - k\{m_Q(x) - m_P(x)\}.$$

Mit den Abkürzungen

$$\Gamma(k) = \int_0^{x-k} m_P(\xi)\, \chi_Q(\xi+k)\, d\xi; \quad \Delta(x) = \int_0^x E(\xi)\, d\xi$$

$$\bar{\Gamma}(k) = \int_0^{x-k} m_{\bar{P}}(\xi)\, \chi_{\bar{Q}}(\xi+k)\, d\xi; \quad \bar{\Delta}(x) = \int_0^x \bar{E}(\xi)\, d\xi$$

gilt nun

$$(4.8)\qquad \int_0^k E(\xi)\,d\xi = \Delta(x) - \Gamma(k) \leqq \frac{m_P^2(x)}{2} + \{m_Q(x) - m_P(x)\}\, m_P(x) - \Gamma(k),$$

$$(4.9)\qquad \int_0^k \bar{E}(\xi)\,d\xi = \bar{\Delta}(x) - \bar{\Gamma}(k) \leqq \frac{m_{\bar{Q}}^2(x)}{2} + \{m_{\bar{P}}(x) - m_{\bar{Q}}(x)\}\, m_{\bar{Q}}(x) - \bar{\Gamma}(k).$$

Die linke Hälfte von (4. 8) folgt aus

$$\int_k^x E(m)\,dm = \int_k^x \int_0^{x-m} \chi_P(\xi)\,\chi_Q(\xi+m)\,d\xi\,dm$$

$$= \int_k^x \int_k^\tau \chi_P(\tau - m)\,\chi_Q(\tau)\,dm\,d\tau = \int_0^{x-k} m_P(\xi)\,\chi_Q(\xi+k)\,d\xi = \Gamma(k).$$

Betrachtet man statt P und Q die Mengen $\bar{Q}$ und $\bar{P}$, so ergibt sich die linke Hälfte von (4. 9). Zum Beweise der Ungleichungen auf den rechten Hälften von (4. 8) und (4. 9) beachte man

$$\Delta(x) = \int_0^x E(\xi)\,d\xi = \int_0^x \int_0^{x-m} \chi_P(\xi)\,\chi_Q(\xi+m)\,d\xi\,dm$$

$$= \int_0^x \int_0^\tau \chi_P(\tau - m)\,\chi_Q(\tau)\,dm\,d\tau = \int_0^x \chi_Q(\tau)\,m_P(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^x \chi_P(\tau)\,m_P(\tau)\,d\tau + \int_0^x \chi_D(\tau)\,m_P(\tau)\,d\tau.$$

Hier bedeutet D die Menge aller Zahlen, welche in Q, aber nicht in P liegen. Nun ist aber

$$\int_0^x \chi_P(\tau)\,m_P(\tau)\,d\tau = \frac{m_P^2(x)}{2},$$

$$\int_0^x \chi_D(\tau)\,m_P(\tau)\,d\tau \leqq m_P(x) \int_0^x \chi_D(\tau)\,d\tau = m_P(x)\,\{m_Q(x) - m_P(x)\}.$$

Damit ist (4. 9) bewiesen. Ganz analog ergibt sich mit $\bar{Q}$ und $\bar{P}$ die Ungleichung auf der rechten Seite von (4. 9). Aus (4. 7), (4. 4) und (4. 8) folgt die erste Grundformel (4. 1), ebenso die zweite aus (4. 7), (4. 5) und (4. 9).

§ 5. Abschätzungen für wesentliche Komponenten im finiten Fall.

13. *Die beiden Grundformeln für $P = Q = A$.* Durch diese Spezialisierung erhält man

Satz 9. *B sei eine schwache Basis der mittleren Ordnung $\lambda_B(x) = \lambda$, $0 \in B$; $A \subseteq [0, x]$ habe die Dichte $\delta_A(x) = \alpha$. Dann gelten für die Summe $C = A + B$ die Abschätzungen:*

$$(5.1)\qquad \frac{\underline{m}_C(\xi)}{\xi} \geqq \alpha\left\{1 + \frac{1+\sqrt{\alpha}+\alpha}{(1+\sqrt{\alpha})^2}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right\} \text{ für } 0 < \xi \leqq x;$$

$$(5.2)\qquad \frac{\underline{m}_C(\xi)}{\xi} \geqq \alpha\left\{1 + \frac{1+\sqrt{1-\alpha}+(1-\alpha)}{(1+\sqrt{1-\alpha})^2}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right\} \text{ für } 0 < \xi \leqq x;\ \lambda \geqq \frac{29}{27}.$$

14. ***Beweis von*** **(5. 1). Wir setzen zunächst A als meßbare Menge voraus. Die erste Grundformel (4. 1) ergibt dann mit $P = Q = A$ und $y \in [0, x]$, da $\lambda_B(y) \leqq \lambda_B(x)$ ist:**

$$(5.3) \qquad \lambda k \{\underline{m}_C(y) - m_A(y)\} \geqq \int_{y-k}^{y} m_A(\xi)\, d\xi + \int_0^{y-k} m_A(\xi)\, \chi_A(\xi + k)\, d\xi - \frac{m_A^2(y)}{2}; \qquad (0 \leqq k \leqq x).$$

Nun benutzen wir $m_A(\xi) \geqq \alpha\xi$:

$$\lambda k \{\underline{m}_C(\lambda) - m_A(y)\} \geqq \int_{y-k}^{y} m_A(\xi)\, d\xi + \alpha \int_0^{y-k} \xi\, \chi_A(\xi + k)\, d\xi - \frac{m_A^2(y)}{2}.$$

$$(5.4) \qquad \lambda k \{\underline{m}_C(y) - m_A(y)\} \geqq \int_{y-k}^{y} m_A(\xi)\, d\xi + \alpha(y-k)\, m_A(y) - \alpha \int_k^y m_A(\xi)\, d\xi - \frac{m_A^2(y)}{2}; \qquad (0 \leqq k \leqq y).$$

In (5. 4) ersetzen wir, was erlaubt ist, beiderseits k durch $y - k$, multiplizieren die so erhaltene Ungleichung mit α und addieren sie zu (5. 4). Es ergibt sich

$$\begin{aligned} &\lambda \{k + \alpha(y-k)\} \{\underline{m}_C(y) - m_A(y)\} \\ &\qquad \geqq (1-\alpha^2) \int_{y-k}^{y} m_A(\xi)\, d\xi - \frac{1+\alpha}{2} m_A^2(y) + \alpha(y - k + \alpha k)\, m_A(y) \\ &\qquad \geqq \frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2} (2yk - k^2) - \frac{1+\alpha}{2} m_A^2(y) + (y - k + \alpha k)\, m_A(y). \end{aligned}$$

Wir setzen $k = \mu y$ und erhalten nach Ordnen und Division[4]) durch y^2

$$(5.5) \qquad \lambda \{(1-\alpha)\mu + \alpha\} \frac{\underline{m}_C(y)}{y} \geqq \frac{\alpha(1-\alpha^2)}{2} (2\mu - \mu^2)$$
$$+ \{\lambda((1-\alpha)\mu + \alpha) + \alpha(1 - (1-\alpha)\mu)\} \frac{m_A(y)}{y} - \frac{1+\alpha}{2} \left(\frac{m_A(y)}{y}\right)^2.$$

Wir setzen $\dfrac{m_A(y)}{y} = \tau$; dann ist $1 \geqq \tau \geqq \alpha$.

Für die Werte τ, für die $\tau \geqq \alpha(2-\alpha)$ ist, ist unsere Behauptung (5. 1) erfüllt, denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\underline{m}_C(y)}{y} \geqq \frac{m_A(y)}{y} = \alpha(2-\alpha) &\geqq \alpha\left(1 + \frac{1-\alpha}{\lambda}\right) \\ &\geqq \alpha\left(1 + \frac{1+\sqrt{\alpha}+\alpha}{(1+\sqrt{\alpha})^2} \frac{1-\alpha}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Sei nun $\alpha \leqq \tau \leqq \alpha(2-\alpha)$. Dann stellt die rechte Seite von (5. 5) eine Funktion

$$\varphi(\tau) = -c_2\tau^2 + c_1\tau + c_0 \qquad (\alpha \leqq \tau \leqq \alpha(2-\alpha))$$

---

[4]) Wir setzen also $y > 0$ voraus. Für $y = 0$ ist Satz 9 trivialerweise richtig.

dar; ihr Minimum wird an einem der Endpunkte des Intervalles angenommen. Wir setzen nun noch speziell

$$\mu = \frac{\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}. \tag{5.6}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} f(2\alpha-\alpha^2)-f(\alpha) &= \{\lambda\sqrt{\alpha}+\alpha(1-\sqrt{\alpha}+\alpha)\}\,\alpha(1-\alpha)-\frac{1+\alpha}{2}\,\alpha^2(1-\alpha)(3-\alpha) \\ &\geqq \{\sqrt{\alpha}(1-\alpha)+\alpha(1+\alpha)\}\,\alpha(1-\alpha)-\frac{1+\alpha}{2}\,\alpha^2(1-\alpha)(3-\alpha) \\ &= \left\{\sqrt{\alpha}-\frac{\alpha(1+\alpha)}{2}\right\}\alpha(1-\alpha)^2 \geqq (\sqrt{\alpha}-\alpha)\,\alpha(1-\alpha)^2 \geqq 0. \end{aligned}$$

Das Minimum wird also für α angenommen; aus (5. 5) folgt deshalb

$$\begin{aligned} \lambda\sqrt{\alpha}\,\frac{\underline{m}_C(y)}{y} &\geqq \lambda\alpha\sqrt{\alpha}+\alpha^2(1-\sqrt{\alpha}+\alpha)-\frac{1+\alpha}{2}\,\alpha^2+\frac{\alpha(1-\alpha^2)\sqrt{\alpha}(2+\sqrt{\alpha})}{2(1+\sqrt{\alpha})^2} \\ &= \lambda\alpha\sqrt{\alpha}+\frac{\sqrt{\alpha}(1+\sqrt{\alpha}+\alpha)}{(1+\sqrt{\alpha})^2}\,\alpha(1-\alpha), \end{aligned}$$

und dies liefert (5. 1).

Ist A eine beliebige Menge, so gibt es nach Lemma 4 mit $f(\zeta)\equiv 1$ zu jedem $\varepsilon>0$ eine meßbare Untermenge A_1 von A mit $\alpha_1=\delta_{A_1}(x)\geqq\delta_A(x)-\varepsilon=\alpha-\varepsilon$. Dann ist $C\geqq C_1=A_1+B$, und (5. 1) gilt für α_1. Die rechte Seite von (5. 1) ist aber eine stetige Funktion von ε, während die linke Seite von ε unabhängig ist; deshalb gilt (5. 1) allgemein.

15. *Beweis von* (5. 2). Nach dem oben Gesagten kann man wieder A als meßbare Menge voraussetzen. Wir setzen in der zweiten Grundformel $P=Q=A$. Für $y\in[0,x]$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda k\{\underline{m}_C(y)-m_A(y)\} &\geqq k m_{\bar{A}}(y)-\int_0^k m_{\bar{A}}(\xi)\,d\xi \\ &\quad+\int_0^{y-k} m_{\bar{A}}(\xi)\,\chi_{\bar{A}}(\xi+k)\,d\xi-\frac{m_{\bar{A}}^2(y)}{2}; \qquad (0\leqq k\leqq y). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Wegen der Meßbarkeit von A ist $m_{\bar{A}}(\xi)=\xi-m_A(\xi)\leqq(1-\alpha)\,\xi$; ferner ist

$$\int_0^{y-k} m_{\bar{A}}(\xi)\,\chi_{\bar{A}}(\xi+k)\,d\xi = m_{\bar{A}}(y-k)\,m_{\bar{A}}(y)-\int_0^{y-k}\chi_{\bar{A}}(\xi)\,m_{\bar{A}}(\xi+k)\,d\xi,$$

also, indem wir die Abschätzung $m_{\bar{A}}(\xi)\leqq(1-\alpha)\,\xi$ verwenden:

$$\lambda k\{\underline{m}_C(y) - m_A(y)\} \geqq k m_{\bar{A}}(y) - \int_0^k m_{\bar{A}}(\xi)\, d\xi + m_{\bar{A}}(y-k)\, m_{\bar{A}}(y)$$

$$- (1-\alpha) \int_0^{y-k} \chi_{\bar{A}}(\xi)\,(\xi + k)\, d\xi - \frac{m_{\bar{A}}^2(y)}{2}$$

$$= k m_{\bar{A}}(y) - \int_0^k m_{\bar{A}}(\xi)\, d\xi + m_{\bar{A}}(y-k)\, m_{\bar{A}}(y)$$

$$- (1-\alpha) \left\{ m_{\bar{A}}(y-k)\, y - \int_0^{y-k} m_{\bar{A}}(\xi)\, d\xi \right\} - \frac{m_{\bar{A}}^2(y)}{2}$$

$$= k m_{\bar{A}}(y) - \int_0^k m_{\bar{A}}(\xi)\, d\xi - m_{\bar{A}}(y-k)\, \{(1-\alpha)\, y - m_{\bar{A}}(y)\}$$

$$+ (1-\alpha) \int_0^{y-k} m_{\bar{A}}(\xi)\, d\xi - \frac{m_{\bar{A}}^2(y)}{2}.$$

Die geschweifte Klammer ist positiv, also darf man weiter abschätzen

$$\lambda k\{\underline{m}_C(y) - m_A(y)\} \geqq k m_{\bar{A}}(y) - \int_0^k m_{\bar{A}}(\xi)\, d\xi - (1-\alpha)\,(y-k)\,\{(1-\alpha)\, y$$

$$- m_{\bar{A}}(y)\} + (1-\alpha) \int_0^{y-k} m_{\bar{A}}(\xi)\, d\xi - \frac{m_{\bar{A}}^2(y)}{2}.$$

$$(5.8) \quad \lambda k\{\underline{m}_C(y) - m_A(y)\} \geqq \{k + (1-\alpha)\,(y-k)\}\, m_{\bar{A}}(y) - \frac{m_{\bar{A}}^2(y)}{2} - \int_0^k m_{\bar{A}}(\xi)\, d\xi$$

$$+ (1-\alpha) \int_0^{y-k} m_{\bar{A}}(\xi)\, d\xi - (1-\alpha)^2 y\,(y-k); \qquad (0 \leqq k \leqq y).$$

In (5. 8) ersetzen wir k durch $(y-k)$, multiplizieren die entstehende Ungleichung mit $(1-\alpha)$ und addieren sie zu (5. 8). Es ergibt sich

$$\lambda\{k + (1-\alpha)\,(y-k)\}\,\{\underline{m}_C(y) - m_A(y)\}$$

$$\geqq \{k + 2(1-\alpha)\,(y-k) + (1-\alpha)^2 k\}\, m_{\bar{A}}(y) - \frac{2-\alpha}{2}\, m_{\bar{A}}^2(x)$$

$$- \{1 - (1-\alpha)^2\} \int_0^k m_{\bar{A}}(\xi)\, d\xi - (1-\alpha)^2 y\,\{y - k + (1-\alpha)\, k\}$$

$$\geqq \{2(1-\alpha)\, y + \alpha^2 k\}\, m_{\bar{A}}(y) - \frac{(2-\alpha)\,(1-\alpha)}{2}\, y m_{\bar{A}}(y)$$

$$- \{1 - (1-\alpha)^2\}\,(1-\alpha)\, \frac{k^2}{2} - (1-\alpha)^2\, y\,(y - \alpha k).$$

$$(5.9)\quad \lambda\{k+(1-\alpha)(y-k)\}\,\underline{m}_C(y)$$
$$\geqq \lambda\{k+(1-\alpha)(y-k)\}\,m_A(y)+\left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)\,y}{2}+\alpha^2 k\right\}m_{\bar{A}}(y)$$
$$-\frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{2}k^2-(1-\alpha)^2\,y(y-\alpha k).$$

Wir setzen $k=\varrho y$, $\varrho=\dfrac{\sqrt{1-\alpha}}{1+\sqrt{1-\alpha}}=\dfrac{\sqrt{1-\alpha}-(1-\alpha)}{\alpha}$.

Dann folgt wegen $m_A(y)=y-m_{\bar{A}}(y)$:

$$(5.10)\quad \lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)\frac{\underline{m}_C(y)}{y}$$
$$\geqq -\left\{\lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)-\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}-\alpha^2\varrho\right\}\frac{m_{\bar{A}}(y)}{y}$$
$$+\lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)-\frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{2}\varrho^2-(1-\alpha)^2(1-\alpha\varrho).$$

Wir wollen zeigen, daß die geschweifte Klammer bei $\dfrac{m_{\bar{A}}(y)}{y}$ positiv ist unter der Voraussetzung $\lambda\geqq\dfrac{29}{27}$. Setzt man den Wert von ϱ ein, so ist zu zeigen

$$(5.11)\quad \lambda\sqrt{1-\alpha}\geqq\frac{1}{2}\{(1-\alpha)(2-\alpha)+2\alpha\sqrt{1-\alpha}\}\quad\left(0\leqq\alpha\leqq 1;\ \lambda\geqq\frac{29}{27}\right).$$

Dies ergibt sich aber, wie man leicht nachprüft, durch Untersuchung der Diskriminante, die man als Funktion von λ erhält, wenn man die Parabelschar $\lambda\sqrt{1-\alpha}$ (λ als Parameter) mit der rechtsstehenden Funktion schneidet[5]).

Wegen (5.11) darf man in (5.10) $m_{\bar{A}}(y)$ durch $(1-\alpha)\,y$ abschätzen. Dies liefert

$$\lambda\{1-\alpha+\alpha\varrho\}\frac{\underline{m}_C(y)}{y}>-\left\{\lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)-\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}-\alpha^2\varrho\right\}\cdot(1-\alpha)$$
$$+\lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)-\frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{2}\varrho^2-(1-\alpha)^2(1-\alpha\varrho)$$
$$=\lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)\,\alpha+\left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}-2\,\frac{1-\alpha}{\alpha}\right.$$
$$\left.+2\alpha\varrho+2(1-\alpha)\,\varrho-(2-\alpha)\,\varrho^2\right\}\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}$$
$$=\lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)\,\alpha+\{1-\alpha+2\varrho-(2-\alpha)\,\varrho^2\}\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\,\frac{\underline{m}_C(y)}{y}$$
$$>\alpha+\frac{1-\alpha+2\varrho-(2-\alpha)\,\varrho^2}{2(1-\alpha+\alpha\varrho)}\,\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda}$$
$$=\alpha+\frac{1+\sqrt{1-\alpha}+(1-\alpha)}{(1+\sqrt{1-\alpha})^2}\,\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda}.$$

Damit ist auch (5.2) bewiesen.

---

[5]) Gleichsetzung von rechter und linker Seite in (5.11) führt nach Abspaltung von $(1-\alpha)$ auf die Gleichung $\alpha^3-\alpha^2-8\alpha(\lambda-1)+4(\lambda^2-1)=0$ mit der Diskriminante $-16\cdot 27\cdot(\lambda-1)(\lambda-2)^2\left(\lambda-\dfrac{29}{27}\right)$.

Bemerkungen.

1. Satz 9 gilt selbstverständlich auch, wenn man $x = \infty$ setzt, d. h. die Abschnittsgrößen durch die finiten Größen ersetzt. Es gilt also für die Summe $C = A + B$

$$\delta(C) \geqq \alpha\left(1 + \frac{1 + \sqrt{\alpha} + \alpha}{(1 + \sqrt{\alpha})^2} \frac{1 - \alpha}{\lambda}\right) \text{ für } 0 \leqq \xi < \infty \tag{5.12}$$

$$\delta(C) \geqq \alpha\left(1 + \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha} + (1 - \alpha)}{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2} \frac{1 - \alpha}{\lambda}\right) \text{ für } 0 \leqq \xi < \infty;\ \lambda \geqq \frac{29}{27}. \tag{5.13}$$

Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen.

2. Die in (5. 1) und (5. 2) bei $\frac{1 - \alpha}{\lambda}$ auftretenden Koeffizientenfunktionen

$$c_1(\alpha) = \frac{1 + \sqrt{\alpha} + \alpha}{(1 + \sqrt{\alpha})^2} \text{ und } c_2(\alpha) = \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha} + (1 - \alpha)}{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2}$$

sind symmetrisch zu $\alpha = {}^1/_2$. Faßt man beide Abschätzungen zusammen, so folgt insbesondere

$$c(\alpha) \equiv \max\,(c_1(\alpha), c_2(\alpha)) \geqq c_1({}^1/_2) = 5 - 3 \cdot \sqrt{2} > \frac{3}{4}.$$

3. In (5. 2) ist die Einschränkung $\lambda \geqq \frac{29}{27}$ notwendig. Ob (5. 2) für jedes $\lambda \geqq 1$ gilt, weiß ich nicht. Von F. Kasch wurde (5. 2) für Mengen natürlicher Zahlen ohne Einschränkung bewiesen, wobei er die Abschätzung $\lambda \geqq 2 - \beta$ benutzte. Die analoge Abschätzung $\lambda_B(x) \geqq 2 - \delta_B(x)$ ist aber falsch, wie etwa das Beispiel der rationalen Zahlen R in $[0, 1]$ lehrt. Dort ist (jede Zahl ist Grenzwert rationaler Zahlen) $\lambda_R(1) = 1$, aber $\delta_R(1) = 0$. Dagegen gilt, wie man leicht nachprüft, die Ungleichung $\lambda \geqq 2 - \tilde{\beta}$, wobei $\tilde{\beta}$ die Dichte von $\tilde{B} = \bigcup_{k=1}^{h} kB$ bedeutet. Ferner ist für $\alpha > 0$ die Dichte $\delta_C(x) \geqq \delta_B(x)$, also $\delta_C(x) \geqq 2 - \lambda$. Für den fraglichen Fall $1 \leqq \lambda \leqq \frac{29}{27}$ ist also von vornherein $\delta_C(x) \geqq \frac{25}{27}$, so daß die Ungleichung (5. 2) nur für α nahe 1 und zugleich $1 \leqq \lambda \leqq \frac{29}{27}$ unbewiesen ist.

16. *Die erste Grundformel für $P = A$, $Q = C$.* Das Analogon zur Erdösschen Vermutung lautet bekanntlich

$$\delta(A + B) \geqq \alpha\left(1 + \frac{1 - \alpha}{\lambda}\right). \tag{*}$$

Diese Vermutung ist noch nicht für alle Wertepaare α, λ bewiesen, jedoch zeigte F. Kasch [14], daß es zu jedem λ ein α_λ gibt, so daß (*) für $0 < \alpha < \alpha_\lambda$ noch übertroffen wird. Das Entsprechende soll für kontinuierliche Punktmengen bewiesen werden.

Satz 10. *Zu jedem $\lambda > 1$ gibt es eine Zahl α_λ, so daß für jede Menge $A \subseteq [0, x]$ mit $\delta_A(x) = \alpha$, $0 < \alpha < \alpha_\lambda$, und jede schwache Basis B mit der mittleren Ordnung $\lambda_B(x) = \lambda$ und $0 \in B$*

$$\delta_{A+B}(x) \geqq \alpha\left(1 + c(\alpha, \lambda)\frac{1 - \alpha}{\lambda}\right) \tag{5.14}$$

gilt, wobei $c(\alpha, \lambda) > 1$ ist.

Beweis. Wir setzen wieder $c_1(\alpha) = \dfrac{1 + \sqrt{\alpha} + \alpha}{(1 + \sqrt{\alpha})^2}$ und

$$c(\alpha, \lambda) = c_1(\alpha) \frac{\lambda}{\lambda - 1 + (1 + \alpha)\sqrt{\alpha}}.$$

Bei vorgegebenem $\lambda > 1$ kann man ein α_1 bestimmen, so daß für $0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1$

$$(5.15) \qquad (\lambda - 1)\sqrt{\alpha} + \alpha\left(\frac{3}{2}(1 + \alpha) - \sqrt{\alpha}\right) \geqq \alpha(1 + \alpha)\left\{1 + c(\alpha, \lambda)\frac{1 - \alpha}{\lambda}\right\}$$

gilt, denn nach Division durch $\sqrt{\alpha}$ geht die linke Seite für $\alpha \to 0$ gegen $\lambda - 1 > 0$, die rechte gegen 0. Unter der Voraussetzung (5. 15) gilt nun, wie gleich gezeigt werden wird,

$$(5.16) \qquad \frac{\underline{m}_C(y)}{y} \geqq \alpha\left(1 + c(\alpha, \lambda)\frac{1 - \alpha}{\lambda}\right) \quad \text{für } 0 < y \leqq x.$$

Hieraus folgt, da $c(\alpha, \lambda) \to \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$ für $\alpha \to 0$, insbesondere Satz 10.

17. *Beweis von* (5. 14). Wir setzen zunächst wieder A als meßbar voraus. Da $C = A + B$ nicht meßbar zu sein braucht, wählen wir zu $\eta > 0$, was nach Lemma 4 möglich ist, eine meßbare Untermenge C^* von C mit $\delta_{C^*}(x) \geqq \delta_C(x) - \eta$. In (4. 1) dürfen wir dann $P = A$, $Q = C^*$ setzen und erhalten

$$\lambda k\{\underline{m}_C(y) - m_A(y)\} - k\{m_{C^*}(y) - m_A(y)\}$$
$$\geqq \int_{y-k}^{y} m_A(\xi)\,d\xi + \int_0^{y-k} m_A(\xi)\,\chi_{C^*}(\xi + k)\,d\xi - \frac{m_A^2(y)}{2} - \{m_{C^*}(y) - m_A(y)\}\,m_A(y)$$

für $0 \leqq k \leqq y \leqq x$. Hieraus folgt

$$(\lambda - 1)\,k\{\underline{m}_C(y) - m_A(y)\} + \eta k y \geqq \int_{y-k}^{y} m_A(\xi)\,d\xi + \alpha\int_0^{y-k} \xi\chi_{C^*}(\xi + k)\,d\xi - \frac{m_A^2(y)}{2}$$
$$- \{\underline{m}_C(y) - m_A(y)\}\,m_A(y).$$

Es ist aber

$$\left|\int_0^{y-k} \xi\{\chi_C(\xi + k) - \chi_{C^*}(\xi + k)\}\,d\xi\right| \leqq y\{\underline{m}_C(y) - m_{C^*}(y)\} \leqq \eta y^2,$$

also

$$\alpha\int_0^{y-k} \xi\chi_{C^*}(\xi + k)\,d\xi \geqq \alpha\int_0^{y-k} \xi\chi_C(\xi + k)\,d\xi - \eta y^2 \geqq \alpha\int_0^{y-k} \xi\chi_A(\xi + k)\,d\xi - \eta y^2,$$

folglich

$$(\lambda - 1)\,k\{\underline{m}_C(y) - m_A(y)\} + \eta k y + \eta y^2 \geqq \int_{y-k}^{y} m_A(\xi)\,d\xi - \alpha\int_k^y m_A(\xi)\,d\xi + \alpha(y - k)\,m_A(y)$$
$$- \frac{m_A^2(y)}{2} - \{\underline{m}_C(y) - m_A(y)\}\,m_A(y).$$

Wir gehen nun genau wie beim Beweis von (5. 1) vor; wir ersetzen k durch $(y-k)$, multiplizieren die erhaltene Ungleichung mit α und addieren sie zur obigen. Es ergibt sich

$$(\lambda-1)\{(1-\alpha)k+\alpha y\}\{\underline{m}_C(y)-m_A(y)\}+\eta y\{(1-\alpha)k+(1+2\alpha)y\}$$
$$\geqq(1-\alpha^2)\int_{y-k}^{y} m_A(\xi)\,d\xi+\alpha\{y-(1-\alpha)k\}\,m_A(y)-\frac{1+\alpha}{2}m_A^2(y)$$
$$-(1+\alpha)\{\underline{m}_C(y)-m_A(y)\}\,m_A(y).$$

Der Integrand wird durch $m_A(\xi)\geqq\alpha\xi$ abgeschätzt. Setzen wir $k=\varrho y$, wobei ϱ eine Konstante mit $0<\varrho<1$ bedeutet, so ergibt sich nach Ordnen und Division durch y^2 (vgl. Fußnote [4])) (auf der linken Seite geht ε mit η gegen 0 und umgekehrt):

$$(\lambda-1)\{(1-\alpha)\varrho+\alpha\}\frac{\underline{m}_C(y)}{y}+\varepsilon$$
$$\geqq\frac{(1-\alpha^2)\alpha\varrho(2-\varrho)}{2}+(\lambda-1)\{(1-\alpha)\varrho+\alpha+\alpha(1-(1-\alpha)\varrho)\}\frac{m_A(y)}{y}$$
$$-\frac{m_A(y)}{y}(1+\alpha)\left\{\frac{\underline{m}_C(y)}{y}-\frac{m_A(y)}{y}\right\}-\frac{1+\alpha}{2}\left(\frac{m_A(y)}{y}\right)^2$$
$$=\{(\lambda-1)((1-\alpha)\varrho+\alpha)+\alpha(1-(1-\alpha)\varrho)\}\frac{m_A(y)}{y}+\frac{1+\alpha}{2}\frac{m_A^2(y)}{y^2}$$
$$+\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}\varrho(2-\varrho)-(1+\alpha)\frac{\underline{m}_C(y)}{y}\frac{m_A(y)}{y}.$$

Wir schätzen $\dfrac{m_A^2(y)}{y^2}$ durch $\alpha\dfrac{m_A(y)}{y}$ ab und setzen $\varrho=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}$.

Dann folgt

$$(\lambda-1)\sqrt{\alpha}\frac{\underline{m}_C(y)}{y}\geqq\left\{(\lambda-1)\sqrt{\alpha}+\alpha\left(\frac{3}{2}(1+\alpha)-\sqrt{\alpha}\right)-(1+\alpha)\cdot\frac{\underline{m}_C(y)}{y}\right\}\cdot\frac{m_A(y)}{y}$$
$$+\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}\,\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})(2-\alpha-\sqrt{\alpha})}{(1-\alpha)^2}-\varepsilon.$$

Ist der Koeffizient von $\dfrac{m_A(y)}{y}$ negativ, so ist also unter Benutzung von (5. 15)

$$(1+\alpha)\frac{\underline{m}_C(y)}{y}>(\lambda-1)\sqrt{\alpha}+\alpha\left(\frac{3}{2}(1+\alpha)-\sqrt{\alpha}\right)$$
$$\geqq\alpha(1+\alpha)\left\{1+c(\alpha,\lambda)\frac{1-\alpha}{\lambda}\right\},$$

und damit ist (5. 14) für diesen Fall bewiesen. Im anderen Falle darf man $\dfrac{m_A(y)}{y}$ durch α abschätzen und erhält nach leichter Rechnung

$$\frac{\underline{m}_C(y)}{y}\geqq\alpha\left\{1+c(\alpha,\lambda)\frac{1-\alpha}{\lambda}\right\}-\varepsilon,$$

und da die linke Seite nicht von ε abhängt, folgt die Behauptung. Für beliebiges A benutze man wieder Lemma 4.

18. *Die Grundformeln für $P = Q = C$.* In diesem Spezialfall ergibt sich

Satz 11. *$A \subseteq [0, x]$ sei eine meßbare Menge mit der Abschnittsdichte $\delta_A(x) = \alpha$, B sei eine schwache Basis für $[0, x]$ mit der mittleren Ordnung $\lambda_B(x) = \lambda$ und $0 \in B$, und $\gamma = \delta_C(x)$ sei die Abschnittsdichte von $C = A + B$. Dann gilt*

$$\gamma \geqq \alpha + c_1(\gamma)\frac{\gamma(1-\gamma)}{\lambda}; \tag{5.17}$$

$$\gamma \geqq \alpha + c_1(1-\gamma)\frac{\gamma(1-\gamma)}{\lambda}. \tag{5.18}$$

Hierbei bedeutet $c_1(\gamma)$ die gleiche Funktion wie in (5. 1). Beim Beweise können wir trivialerweise $0 < \gamma < 1$ voraussetzen. Da C nicht meßbar zu sein braucht, wählen wir zu $\eta > 0$ eine meßbare Untermenge C_1 von C, so daß $\delta_{C_1}(x) \geqq \delta_C(x) - \varepsilon$ ist. Dies ist wieder nach Lemma 4 möglich.

19. *Beweis von* (5. 17). Mit $P = Q = C_1$ liefert die erste Grundformel (4. 1)

$$\lambda k\{\underline{m}_C(y) - m_A(y)\} \geqq \int_{y-k}^{y} m_{C_1}(\xi)\,d\xi + \int_0^{y-k} m_{C_1}(\xi)\,\chi_{C_1}(\xi+k)\,d\xi - \frac{m_{C_1}^2(y)}{2}$$

für $0 \leqq k \leqq y \leqq x$. Nach Voraussetzung ist $\underline{m}_C(\xi) \geqq m_{C_1}(\xi) \geqq (\gamma - \eta)\,\xi = \gamma_1\xi$. Also ergibt sich

$$\lambda k\{\underline{m}_C(y) - m_A(y)\} \geqq \int_{y-k}^{y} m_{C_1}(\xi)\,d\xi - \gamma_1\int_k^y m_{C_1}(\xi)\,d\xi + \gamma_1(y-k)\,m_{C_1}(y) - \frac{m_{C_1}^2(y)}{2}.$$

Wir ersetzen wieder k durch $(y-k)$, multiplizieren die so erhaltene Ungleichung mit γ_1 und addieren sie zur obigen.

$$\begin{aligned}
&\lambda\{k + \gamma_1(y-k)\}\{\underline{m}_C(y) - m_A(y)\}\\
&\quad\geqq (1-\gamma_1^2)\int_{y-k}^{y} m_{C_1}(\xi)\,d\xi - \frac{1+\gamma_1}{2}\,m_{C_1}^2(y) + \gamma_1(y-k+\gamma_1 k)\,m_{C_1}(y)\\
&\quad\geqq \frac{(1-\gamma_1^2)\,\gamma_1}{2}(2yk-k^2) - \frac{1+\gamma_1}{2}\,m_{C_1}^2(y) + \gamma_1(y-k+\gamma_1 k)\,m_{C_1}(y).
\end{aligned}$$

Zu $\varepsilon_1 > 0$ kann man η so klein wählen, daß gilt:

$$\begin{aligned}
&\lambda\{k + \gamma(y-k)\}\{\underline{m}_C(y) - m_A(y)\}\\
&\quad= \frac{(1-\gamma^2)\,\gamma}{2}(2yk-k^2) - \frac{1+\gamma}{2}\,\underline{m}_C^2(y) + \gamma(y-k+\gamma k)\,\underline{m}_C(y) - \varepsilon_1 y^2.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Setzen wir $k = \mu y$, so folgt (vgl. wieder Fußnote [4])

$$\begin{aligned}
&\lambda\{(1-\gamma)\mu + \gamma\}\frac{\underline{m}_C(y)}{y}\\
&\quad\geqq \frac{\gamma(1-\gamma^2)}{2}(2\mu-\mu^2) + \lambda\{(1-\gamma)\mu+\gamma\}\frac{m_A(y)}{y}\\
&\qquad + \gamma\{1-\mu(1-\gamma)\}\frac{\underline{m}_C(y)}{y} - \frac{1+\gamma}{2}\frac{\underline{m}_C^2(y)}{y^2} - \varepsilon_1.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Die Funktion $\frac{\underline{m}_C(y)}{y}$ ist in $(0, x]$ stetig. Entweder gibt es ein $y_0 \in (0, x]$ so, daß $\frac{\underline{m}_C(y_0)}{(y_0)} = \gamma$ ist, oder es existiert eine Folge $\omega_i \to 0$ für $i \to \infty$ so, daß $\frac{\underline{m}_C(\omega_i)}{\omega_i} \to \gamma$ $(i \to \infty)$ gilt. Auf jeden Fall gibt es zu $\omega > 0$, $\tau > 0$ eine Zahl y_0 mit

$$(5.\,21) \qquad \frac{\underline{m}_C(y)}{y} \geqq \frac{\underline{m}_C(y_0)}{y_0} - \tau; \qquad \gamma + \omega \geqq \frac{\underline{m}_C(y_0)}{y_0} \geqq \gamma.$$

Daraus und aus (5. 20) folgt

$$\lambda\{(1-\gamma)\mu + \gamma\}\frac{\underline{m}_C(y)}{y} \geqq \lambda\{(1-\gamma)\mu + \gamma\}\alpha + \gamma\{1-(1-\gamma)\mu\}$$
$$- \frac{1+\gamma}{2}\gamma^2 + \frac{\gamma(1-\gamma^2)}{2}(2\mu - \mu^2) - \varepsilon_2.$$

Wir setzen $\mu = \frac{\sqrt{\gamma}}{1+\sqrt{\gamma}}$ und erhalten

$$\frac{\underline{m}_C(y)}{y} \geqq \alpha + c_1(\gamma)\frac{\gamma(1-\gamma)}{\lambda} - \varepsilon_2,$$

und da die linke Seite nicht von ε_2 abhängt, folgt hieraus (5. 17).

20. *Beweis von* (5. 18). Wir gehen von der zweiten Grundformel (4. 2) aus und setzen darin $P = Q = C_1$. Durch die gleichen Überlegungen wie oben und beim Beweis von Satz 9 gelangt man schließlich zur Ungleichung

$$(5.\,22) \qquad \lambda\{1-\gamma+\gamma\varrho\}\frac{\underline{m}_C(y)}{y}$$
$$\geqq -\left\{\lambda(1-\gamma+\gamma\varrho) - \frac{(1-\gamma)(2+\gamma)}{2} - \gamma^2\varrho\right\}\frac{m_{\bar{C}_1}(y)}{y}$$
$$+ \lambda(1-\gamma+\gamma\varrho) - \frac{\gamma(1-\gamma)(2-\gamma)}{2}\varrho^2 - (1-\gamma)^2(1-\gamma\varrho) - \varepsilon_1$$
$$= -\{\cdots\}\left(1 - \frac{m_{C_1}(y)}{y}\right) + \cdots - \varepsilon_1$$
$$\geqq -\{\cdots\}\left(1 - \frac{\underline{m}_C(y)}{y}\right) + \cdots - \varepsilon_2.$$

Durch die gleiche Minimumbetrachtung wie bei (5. 1) ergibt sich, daß wir $\frac{\underline{m}_C(y)}{y}$ bis auf einen Fehler ε_3 durch γ ersetzen dürfen, und dies liefert die Behauptung (5. 18). Bemerkenswert ist, daß wir jetzt nicht den Faktor bei $\frac{m_{C_1}(y)}{y}$ als positiv nachzuweisen haben, so daß hier die Einschränkung $\lambda \geqq \frac{29}{27}$ wegfällt.

§ 6. Abschätzungen für wesentliche Komponenten im asymptotischen Fall.

21. *Die asymptotischen Grundformeln.* Es sollen nunmehr die in § 5 gewonnenen Ergebnisse über wesentliche Komponenten auch auf den asymptotischen Fall übertragen werden. Zunächst führen wir die entsprechenden Bezeichnungen und Hilfsmittel ein.

Sei B eine Menge nichtnegativer reeller Zahlen mit der Eigenschaft, daß sich jede Zahl $x \geqq x_0$ als Summe einer für alle x beschränkten Anzahl von Zahlen aus B darstellen läßt. Dann heißt B *asymptotische Basis*. $h(x)$ bedeute wieder die kleinste Anzahl von Summanden, die zur Darstellung von x benötigt werden ($x \geqq x_0$). Als *asymptotische Ordnung von* B bezeichnet man für passendes $x_1 \geqq x_0$

$$h^*(B) = \max h(\xi);\ \xi \geqq x_1. \tag{6.1}$$

Nach Satz 6 ist jede Menge A der asymptotischen Dichte $\alpha^* > 0$ eine asymptotische Basis der Ordnung $h^*(A) \leqq [1/\alpha^*] + 1$.

Eine Menge nichtnegativer Zahlen heißt *schwache asymptotische Basis*, wenn die Menge der Zahlen, die sich als Summe von beschränkt vielen Zahlen aus B darstellen lassen, oberhalb einer Zahl x_0 überall dicht ist. B heißt *schwache symptotische Basis genau h^*-ter Ordnung*, wenn $h^* \cdot B$ oberhalb x_0 überall dicht liegt und es keine entsprechende Zahl mehr für $(h^* - 1) \cdot B$ gibt.

Für $\xi \geqq x_0$ setzen wir $l(\xi) = \varliminf\limits_{\tau \to \xi} h(\tau)$, $\tau \in \bigcup\limits_{\varkappa=1}^{h^*} \varkappa \cdot B$.

$l(\xi)$ ist Lebesgue-integrierbar.

Als die *mittlere asymptotische Ordnung* $\lambda^*(B)$ der schwachen asymptotischen Basis B bezeichnen wir die kleinste Zahl λ^* mit der Eigenschaft

$$\int_{x_0}^{y} l(\xi)\, d\xi \leqq (\lambda^* + \varepsilon)\, y \text{ für } y \geqq y_0(\varepsilon). \tag{6.2}$$

Wir wollen nun Satz 9 auf asymptotische Größen übertragen und benötigen dazu die beiden Grundformeln. Wir setzen $A \leqq [0, \infty)$ als meßbare Menge der asymptotischen Dichte $\alpha^* = \delta^*(A)$ voraus, B als schwache asymptotische Basis der mittleren asymptotischen Ordnung $\lambda^*(B) = \lambda^*$; $l(\xi)$ sei oberhalb x_0 erklärt. Es sei $C = A + B$ und P und Q seien meßbare Mengen mit $A \leqq P \leqq Q \leqq C$.

Zu $\eta > 0$, $\omega > 0$ bestimmen wir eine Zahl $y_1 \geqq x_0$ mit

$$\begin{cases} m_A(y) & \geqq (\alpha^* - \eta)\, y = \alpha_1^* y \text{ für } y \geqq y_1, \\ \int\limits_{x_0}^{y} l(\xi) d\xi & \leqq (\lambda^* + \omega)\, y = \lambda_1^* y \text{ für } y \geqq y_1. \end{cases} \tag{6.3}$$

Für $x \geqq m \geqq 0$ sind die Funktionen $D(m)$, $E(m)$ und $\overline{E}(m)$ wie in Nr. 11 erklärt. (4.4), (4.5), Lemma 6, Lemma 7 und Lemma 8 gelten auch jetzt. Für $m \in \bigcup\limits_{\varkappa=1}^{h^*} \varkappa \cdot B$ erhält man also analog

$$D(m) \leqq h(m)\, \{\underline{m}_C(x) - m_A(x)\} - \{m_Q(x) - m_P(x)\}.$$

Für das weitere setzen wir $x > y_1 \geqq x_0$ voraus. Sei $\xi \in [y_1, x]$. Dann schließt man wie bei (4.6) und erhält

$$D(\xi) \leqq l(\xi)\, \{\underline{m}_C(x) - m_A(x)\} - \{m_Q(x) - m_P(x)\}. \tag{6.4}$$

Es sei k eine beliebige reelle Zahl, die der Bedingung $y_1 \leqq k \leqq x$ genügt. Wir integrieren (6.4) von y_1 bis k. Da η, ω und damit auch y_1 feste Größen sind, gilt wegen (6.3)

$$\int_0^k D(\xi)\, d\xi \leqq \lambda_1^* k\, \{\underline{m}_C(x) - m_A(x)\} - k\, \{m_Q(x) - m_P(x)\} + O(x). \tag{6.5}$$

Die Abschätzungen (4. 8) und (4. 9) sind nicht von der Struktur von A und B, d. h. nicht wie (6. 2) von einer Schranke y_0 abhängig, sondern gelten auch hier uneingeschränkt. Aus (6. 5), (4. 4) und (4. 8) bzw. (6. 5), (4. 5) und (4. 9) folgen die beiden *asymptotischen Grundformeln* entsprechend wie (4. 1) und (4. 2):

$$(6.\,6)\qquad \lambda_1^* k\{\underline{m}_C(x) - m_A(x)\} - k\{m_Q(x) - m_P(x)\}$$
$$\geqq \int_{x-k}^{x} m_P(\xi)\,d\xi + \int_0^{x-k} m_P(\xi)\,\chi_Q(\xi+k)\,d\xi - \frac{m_P^2(x)}{2}$$
$$-\{m_Q(x) - m_P(x)\}\,m_P(x) + O(x) \quad \text{für } y_1(\eta,\omega) \leqq k \leqq x.$$

$$(6.\,7)\qquad \lambda_1^* k\{\underline{m}_C(x) - m_A(x)\} - k\{m_Q(x) - m_P(x)\}$$
$$\geqq k m_{\bar{Q}}(x) - \int_0^{k} m_{\bar{Q}}(\xi)\,d\xi + \int_0^{x-k} m_{\bar{P}}(\xi)\,\chi_{\bar{Q}}(\xi+k)\,d\xi - \frac{m_{\bar{Q}}^2(x)}{2}$$
$$-\{m_{\bar{P}}(x) - m_{\bar{Q}}(x)\}\,m_{\bar{Q}}(x) + O(x) \quad \text{für } y_1(\eta,\omega) \leqq k \leqq x.$$

22. *Spezialisierung für $P = Q = A$.* Der sich in diesem Falle ergebende Satz lautet:

Satz 12. *B sei eine schwache asymptotische Basis der mittleren asymptotischen Ordnung $\lambda^*(B) = \lambda^*$, $A \subseteq [0, \infty)$ habe die asymptotische Dichte $\delta^*(A) = \alpha^*$. Dann gelten die Abschätzungen*

$$(6.\,8)\qquad \delta^*(A+B) \geqq \alpha^*\left(1 + \frac{1+\sqrt{\alpha^*}+\alpha^*}{(1+\sqrt{\alpha^*})^2}\cdot\frac{1-\alpha^*}{\lambda^*}\right) \quad \textit{für } \lambda^* \geqq 1;$$

$$(6.\,9)\qquad \delta^*(A+B) \geqq \alpha^*\left(1 + \frac{1+\sqrt{1-\alpha^*}+(1-\alpha^*)}{(1+\sqrt{1-\alpha^*})^2}\cdot\frac{1-\alpha^*}{\lambda^*}\right) \quad \textit{für } \lambda^* \geqq \frac{29}{27}.$$

Beweis von (6. 8):

Für $\alpha^* = 0$ und $\alpha^* = 1$ ist (6. 8) trivialerweise richtig. Wir können also $0 < \alpha^* < 1$ voraussetzen. Wir nehmen zunächst A als meßbare Menge an. Wir wählen $\eta > 0$, $\omega > 0$, bestimmen y_1 gemäß (6. 3) und setzen in der ersten asymptotischen Grundformel $P = Q = A$. Es folgt

$$(6.\,10)\qquad \lambda_1^* k\{\underline{m}_C(x) - m_A(x)\} \geqq \int_{x-k}^{x} m_A(\xi)\,d\xi + \int_0^{x-k} m_A(\xi)\,\chi_A(\xi+k)\,d\xi - \frac{m_A^2(x)}{2} + O(x).$$

Wir wählen x und k so groß, daß zugleich $k \geqq y_1$; $x - k \geqq y_1$ ist. Wegen (6. 10) ergibt sich dann

$$(6.\,11)\qquad \lambda_1^* k\{\underline{m}_C(x) - m_A(x)\} \geqq \int_{x-k}^{x} m_A(\xi)\,d\xi + \alpha_1^*(x-k)\,m_A(x)$$
$$-\alpha_1^* \int_k^x m_A(\xi)\,d\xi - \frac{m_A^2(x)}{2} + O(x).$$

In dieser Ungleichung ersetzen wir k durch $x - k$, multiplizieren diese Ungleichung mit α_1^* und addieren die so erhaltene Ungleichung zu (6. 11). Es folgt genau wie im finiten Fall mit $k = \mu x$:

$$\lambda_1^*\{(1-\alpha_1^*)\mu+\alpha_1^*\}\frac{m_C(x)}{x} \geqq \{\lambda_1^*((1-\alpha_1^*)\mu+\alpha_1^*)+\alpha_1^*(1-(1-\alpha_1^*)\mu)\}\frac{m_A(x)}{x}$$
$$+\frac{1+\alpha_1^*}{2}\left(\frac{m_A(x)}{x}\right)^2+\frac{\alpha_1^*(1-\alpha_1^{*2})}{2}(2\mu-\mu^2)+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Nun folgt die gleiche Minimumbetrachtung wie im finiten Fall. Man erhält daraus

$$\frac{m_C(x)}{x} \geqq \alpha_1^*\left\{1+\frac{1+\sqrt{\alpha_1^*}+\alpha_1^*}{(1+\sqrt{\alpha_1^*})^2}\,\frac{1-\alpha_1^*}{\lambda_1^*}\right\}+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Dies liefert mit $x\to\infty$

$$\delta^*(A+B) \geqq \alpha_1^*\left\{1+\frac{1+\sqrt{\alpha_1^*}+\alpha_1^*}{(1+\sqrt{\alpha_1^*})^2}\,\frac{1-\alpha_1^*}{\lambda_1^*}\right\},$$

und da $\delta^*(A+B)$ von η und ω nicht abhängt, liefert dies die Behauptung.

Ist A eine beliebige Menge, so gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ eine meßbare Untermenge A_2 mit $\delta^*(A_2)=\alpha_2^*>\alpha^*-\varepsilon$.

Es ist

$$\delta^*(A+B) \geqq \delta^*(A_2+B) \geqq \alpha_2^*\left(1+c_1(\alpha_2^*)\,\frac{1-\alpha_2^*}{\lambda^*}\right)$$

nach dem eben Bewiesenen, und da $\delta^*(A+B)$ nicht von ε abhängt, folgt (6. 8) allgemein wegen $\alpha^*\geqq\alpha_2^*\geqq\alpha^*-\varepsilon$.

Zum Beweis von (6. 9) setzt man in der zweiten asymptotischen Grundformel $P=Q=A$. Man erhält bis auf $O(x)$ bzw. $O\left(\frac{1}{x}\right)$ die gleichen Abschätzungen wie im finiten Falle und daraus wie oben die Behauptung (6. 9).

23. *Spezialisierung auf $P=A$, $Q=C$.* In entsprechender Weise wie Satz 12 erhält man durch die Spezialisierung der asymptotischen Grundformel auf $P=A$, $Q=C$ den folgenden Satz 13, der die Übertragung der Aussage über die Erdössche Vermutung auf den asymptotischen Fall darstellt.

Satz 13. *Besteht die Ungleichung*

$$(\lambda^*-1)\sqrt{\alpha^*}+\alpha^*\left(\frac{3}{2}(1+\alpha^*)-\sqrt{\alpha^*}\right) \tag{6. 12}$$
$$\geqq \alpha^*(1+\alpha^*)\left(1+c(\alpha^*,\lambda^*)\,\frac{1-\alpha^*}{\lambda^*}\right),$$

dann gilt

$$\gamma^* \geqq \alpha^*\left(1+c(\alpha^*,\lambda^*)\,\frac{1-\alpha^*}{\lambda^*}\right). \tag{6. 13}$$

Der Beweis verläuft in analoger Schlußweise wie beim finiten Fall.

24. *Spezialisierung auf $P=Q=C$.* In Analogie zu Satz 11 erhält man

Satz 14. *$A\subseteq[0,\infty)$ sei eine meßbare Menge mit der asymptotischen Dichte $\delta^*(A)=\alpha^*$; B eine schwache asymptotische Basis mit der mittleren asymptotischen Ordnung $\lambda^*(B)=\lambda^*$. Dann gilt mit $\delta^*(A+B)=\gamma^*$*

$$\gamma^* \geqq \alpha^* + c_1(\gamma^*)\frac{\gamma^*(1-\gamma^*)}{\lambda^*}, \tag{6.14}$$

$$\gamma^* \geqq \alpha^* + c_1(1-\gamma^*)\frac{\gamma^*(1-\gamma^*)}{\lambda^*}. \tag{6.15}$$

Zum *Beweis* geht man von den beiden asymptotischen Grundformeln (6. 6) und (6. 7) aus mit $P = Q = C^*$, wo C^* zu $\eta > 0$ eine meßbare Untermenge von C mit $\delta^*(C^*) \geqq \delta^*(C) - \eta$ ist. Eine solche existiert nach Lemma 5 stets.

Auch hier erübrigt sich die Minimumbetrachtung, wie sie im Fall $P = Q = A$ bei Satz 12 erforderlich war. Statt dessen betrachten wir analog zu Satz 11 eine Folge $f_i \to \infty$ mit

$$\gamma_1 = \gamma^* - \varepsilon \leqq \frac{m_C(f_i)}{f_i} \leqq \gamma^* + \varepsilon = \gamma_2 \qquad (f_i \to \infty),$$

die es nach Definition von γ^* stets gibt. Der Grenzübergang $f_i \to \infty$ liefert dann (6. 14) und (6. 15).

25. *Bemerkung.* F. Kasch hat in seiner Arbeit [14] in den Fällen, die unseren Formeln (6. 14) und (6. 15) entsprechen, für γ bzw. γ^* weitere Abschätzungen erhalten, indem er auf der rechten Seite dieser Formeln γ als Funktion von α bzw. γ^* als Funktion von α^* ausgedrückt hat. Diese Rechnung läßt sich wörtlich auch auf unsere Formeln anwenden. Dann ergeben sich unter gewissen Voraussetzungen noch Verbesserungen für (6. 14) und (6. 15).

III. DIFFERENZENMENGEN.

26. *Die beiden Grundformeln für Differenzenmengen.* Die Abschätzungen über wesentliche Komponenten kann man nach F. Kasch durch geeignete Abänderungen auch zu Aussagen über Differenzenmengen benutzen. Diese Ergebnisse sollen jetzt unter Benutzung der Abschätzungen von § 4 auch auf lineare Punktmengen übertragen werden.

Es seien A und B zwei beliebige lineare Punktmengen, $0 \in B$; dann sei

$$C^- = A - B = \{a - b;\ a \in A,\ b \in B;\ a \geqq b\} \tag{7.1}$$

die arithmetische *Differenz* von A und B. Ferner definieren wir für $0 \leqq m \leqq x$, wenn A, P, Q meßbare Mengen mit $A \leqq P \leqq Q \leqq C^-$ bedeuten:

$$D^-(m) = \int_0^{x-m} \chi_{\bar{Q}}(\xi)\ \chi_P(\xi + m)\, d\xi = \int_m^x \chi_P(\xi)\ \chi_{\bar{Q}}(\xi - m)\, d\xi,$$

$$E^-(m) = \int_0^{x-m} \chi_{\bar{Q}}(\xi)\ \chi_{\bar{P}}(\xi + m)\, d\xi,$$

$$\overline{E}^-(m) = \int_0^{x-m} \chi_Q(\xi)\ \chi_P(\xi + m)\, d\xi = \int_m^x \chi_P(\xi)\ \chi_Q(\xi - m)\, d\xi.$$

Dann ist

$$D^-(m) = m_{\bar{Q}}(x - m) - E^-(m), \tag{7.2}$$

$$D^-(m) = m_P(x) - m_P(m) - \overline{E}^-(m). \tag{7.3}$$

Analog Lemma 6 ergibt sich für $0 \leqq t \leqq m$

$$D^-(m) \leqq D^-(t) + D^-(m-t) + m_{\bar{P}}(x) - m_{\bar{Q}}(x). \tag{7.4}$$

Analog Lemma 7 gilt auch hier

Lemma 9. *Für $b \in B$ ist $D^-(b) \leqq \underline{m}_{C^-}(x) - m_Q(x) + m_P(x) - m_A(x)$.*

Der Beweis ergibt sich mit der Rechnung wie bei Lemma 7. Man hat nur zu beachten, daß aus $\xi + b \in A$ stets $\xi \in C^-$ folgt.

Schließlich ergibt sich analog zu Lemma 8 die Stetigkeit von $D^-(m)$. Nunmehr gilt mit den Bezeichnungen der vorhergehenden Paragraphen

Satz 15. *Es sei A eine meßbare Menge in $[0, x]$, B eine schwache Basis der mittleren Ordnung $\lambda_B(x) = \lambda$ mit $0 \in B$, $C^- = A - B$; ferner seien P und Q zwei meßbare Mengen mit $A \leqq P \leqq Q \leqq C^-$. Dann gelten die Abschätzungen*

$$\begin{aligned} &\lambda k \{\underline{m}_{C^-}(x) - m_A(x)\} - k\{m_Q(x) - m_P(x)\} \\ &\geqq \int_{x-k}^{x} m_{\bar{Q}}(\xi)\, d\xi + \int_0^{x-k} m_{\bar{Q}}(\xi)\, \chi_{\bar{P}}(\xi + k)\, d\xi - \frac{m_{\bar{Q}}^2(x)}{2} - \{m_{\bar{P}}(x) - m_{\bar{Q}}(x)\}\, m_{\bar{Q}}(x), \end{aligned} \tag{7.5}$$

$$\begin{aligned} &\lambda k \{\underline{m}_{C^-}(x) - m_A(x)\} - k\{m_Q(x) - m_P(x)\} \\ &\geqq k m_P(x) - \int_0^k m_P(\xi)\, d\xi + \int_0^{x-k} m_Q(\xi)\, \chi_P(\xi + k)\, d\xi - \frac{m_P^2(x)}{2} \\ &\qquad - \{m_Q(x) - m_P(x)\}\, m_P(x) \end{aligned} \tag{7.6}$$

für $0 \leqq k \leqq x$.

Beweis. Für $m \in \widetilde{B} = \bigcup_{k=1}^{h} k \cdot B$ gibt es eine Darstellung $m = \sum_{\lambda=1}^{h(m)} b_\lambda$. Nach (5.6) und Lemma 9 ergibt sich (vgl. den Beweis von Satz 8):

$$D^-(m) \leqq l(m)\, \{\underline{m}_{C^-}(x) - m_A(x)\} - \{m_Q(x) - m_P(x)\}.$$

Wegen der Erklärung von $l(\xi)$ und der Stetigkeit von $D^-(m)$ folgt wieder allgemein (vgl. (4.6))

$$D^-(\xi) \leqq l(\xi)\, \{\underline{m}_{C^-}(x) - m_A(x)\} - \{m_Q(x) - m_P(x)\}. \tag{7.7}$$

Für $0 \leqq k \leqq x$ integriere man (7.7) von 0 bis k:

$$\int_0^k D^-(\xi)\, d\xi \leqq \lambda k\, \{\underline{m}_{C^-}(x) - m_A(x)\} - k\{m_Q(x) - m_P(x)\}. \tag{7.8}$$

Genau wie in (4.8) und (4.9) beweist man nunmehr

$$\begin{aligned} \int_0^k E^-(m)\, dm &\leqq \frac{m_{\bar{Q}}^2(x)}{2} + \{m_{\bar{P}}(x) - m_{\bar{Q}}(x)\}\, m_{\bar{Q}}(x) \\ &\quad - \int_0^{x-k} m_{\bar{Q}}(\xi)\, \chi_{\bar{P}}(\xi + k)\, d\xi, \end{aligned} \tag{7.9}$$

$$\begin{aligned} \int_0^k \overline{E^-}(m)\, dm &\leqq \frac{m_P^2(x)}{2} + \{m_Q(x) - m_P(x)\}\, m_P(x) \\ &\quad - \int_0^{x-k} m_Q(\xi)\, \chi_P(\xi + k)\, d\xi. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Aus (7. 8), (7. 2) und (7. 9) folgt die erste Grundformel (7. 5), aus (7. 8), (7. 3) und (7. 10) die zweite Grundformel (7. 6).

27. *Anwendungen.* Aus den beiden Grundformeln lessen eich nun wieder verschiedene Folgerungen ziehen. Zunächst sei vermerkt, daß ohne Zusatzbedingungsn keine nichttrivialen Abschätzungen der Abschnittsdichte für C^- existieren können; denn sei speziell $A = [0, \alpha]$, so ist $\delta_A(1) = \alpha$, aber auch $C^- = [0, \alpha]$ und damit $\delta_{C^-}(1) = \alpha$. Damit C^- eine echte Obermenge von A sei, muß A eine gewisse „Auflockerung" besitzen, was man etwa zusätzlich durch die Größen $\bar{\alpha} = \overline{\text{fin}}\,(\underline{m}_A(\xi)/\xi)$; $(0 < \xi \leqq x)$ ausdrücken kann. Für diese liefern dann die beiden Grundformeln (7. 5) und (7. 6) durch ähnliches Vorgehen wie in Abschnitt II nichttriviale Abschätzungen.

Wir schließen uns wiederum der Arbeit von F. Kasch an, indem wir nur zwei spezielle Folgerungen wie in der zitierten Arbeit [13] ziehen.

Es sei $C' = \{|a \pm b|;\ a \in A, b \in B\}$, und $C^\pm = C \cup C^-$; dann ist $C' \geqq C^\pm$.

Satz 16. *Es sei A eine beliebige Menge in $[0, x]$ und $\delta_A(x) = \alpha$, ferner B eine schwache Basis mit $\lambda_B(x) = \lambda$. Dann gilt für jedes $y \in (0, x]$*

$$\frac{\underline{m}_{C'}(y)}{y} \geqq \frac{\underline{m}_{C^\pm}(y)}{y} \geqq \underline{m}_A(y) + \frac{\underline{m}_A(y)\,(y - \underline{m}_A(y))}{2\lambda y}.$$

Wir setzen zunächst wieder voraus, daß A meßbar sei. Wegen $\lambda_B(x) \geqq \lambda_B(y)$ für $y \in (0, x]$ folgt mit $P = Q = A$ aus (7. 6)

$$(7.\,11) \qquad \lambda k\,\{\underline{m}_{C^-}(y) - m_A(y)\} \geqq k m_A(y) - \int_0^y m_A(\xi)\,d\xi + \int_0^{y-k} m_A(\xi)\,\chi_A(\xi + k)\,d\xi - \frac{m_A^2(y)}{2}.$$

In (5. 3) und (7. 11) setzen wir $k = y$ und addieren beide Ungleichungen

$$\lambda y\,\{\underline{m}_C(y) + \underline{m}_{C^-}(y) - 2m_A(y)\} \geqq y m_A(y) - m_A^2(y).$$

Es ist aber $\underline{m}_{C^\pm}(y) \geqq \underline{m}_C(y)$, $\underline{m}_{C^-}(y)$, also

$$2\lambda y\,\{\underline{m}_{C^\pm}(y) - m_A(y)\} \geqq y m_A(y) - m_A^2(y),$$

und dies liefert die Behauptung. Für eine beliebige Menge A nehme man eine meßbare Untermenge, für die $\delta_{A_1}(x) \geqq \delta_A(x) - \varepsilon$.

Ist $A = \{a\}$ eine lineare Punktmenge, so heißt die Menge $A^* = \{a + m\}$ für beliebiges reelles m eine *Verschiebung* von A. Für $m = 0$ ist der Durchschnitt von A^* mit $\bar{A}$ leer. Es interessiert die Frage, ob es eine Verschiebung A^* von A gibt derart, daß der Durchschnitt mit $\bar{A}$ ein möglichst großes Maß hat.

Satz 17. *Ist $A \geq [0, x]$ meßbar mit dem Maß $\frac{x}{2}$, so gibt es eine Verschiebung A^* von A derart, daß*

$$m(A^* \cap \bar{A}) \geqq \frac{2 - \sqrt{2}}{4}\,x \quad \textit{ist.}$$

Beweis. Wir benutzen (4. 4) und (7. 2) für $P = Q = A$.

$$D(m) = m_A(x - m) - E(m);\ D^-(m) = m_{\bar{A}}(x - m) - E^-(m).$$

Die Abschätzungen (4. 8) und (7. 9) liefern wiederum für $P = Q = A$

$$\int_0^k D(\xi)\,d\xi \geqq \int_{x-k}^{x} m_A(\xi)\,d\xi - \frac{m_A^2(x)}{2} + \int_0^{x-k} m_A(\xi)\,\chi_A(\xi+k)\,d\xi,$$

$$\int_0^k D^-(\xi)\,d\xi \geqq \int_{x-k}^{x} m_{\bar{A}}(\xi)\,d\xi - \frac{m_{\bar{A}}^2(x)}{2} + \int_0^{x-k} m_{\bar{A}}(\xi)\,\chi_{\bar{A}}(\xi+k)\,d\xi.$$

Die beiden obigen Ungleichungen werden addiert und die letzten Integrale vernachlässigt. Mit

$$\max_{0 \leq m \leq x} \{D(m),\ D^-(m)\} = D(m_0)$$

ergibt sich

$$2 \cdot k \cdot D(m_0) \geqq \frac{x^2}{4} - \frac{(x-k)^2}{2},$$

und dies liefert mit $k = \frac{x}{\sqrt{2}}$

$$D(m_0) \geqq \frac{2-\sqrt{2}}{4} \cdot x.$$

$D(m_0)$ bzw. $D^-(m_0)$ bedeuten aber gerade das Maß des Durchschnittes der um m_0 verschobenen Menge mit der Komplementärmenge, womit Satz 17 bewiesen ist.

Literaturverzeichnis.

[1] *E. Artin* und *Scherk*, On the sum of two sets of integers. Annals of Math. **44** (1943), 138–142.

[2] *A. Brauer*, Über die Dichte der Summe zweier Mengen, deren eine von positiver Dichte ist. Math. Zeitschr. **44** (1938), 212–232.

[3] *C. Burstin*, Die Spaltung des Kontinuums in c im L. Sinne nichtmeßbare Mengen. Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien, math.-natw. Klasse. Sitzungsberichte Abt. IIa. **125** (1916), 3. Heft.

[4] *L. Chatrowsky*, Sur le théorème de Erdös-Raikov. Bull. Acad. Sci. URSS., Sér. Math., Izvestia Akad. Nauk. SSSR **9** (1945), 301–310.

[5] *L. Cheo*, A remark on the $(\alpha+\beta)$-theorem. Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 175–177.

[6] *A. J. Chintschin*, Über ein metrisches Problem der additiven Zahlentheorie. Mat. Sbornik **40** (1933), 180–189.

[7] *J. G. van der Corput*, On sets of integers I–III. Proc. Acad. Sci. Amsterdam, **50** (1947), 252–261, 340–350, 429–435.

[8] *F. J. Dyson*, A theorem on the densities of sets of integers. J. London Math. Soc. **20** (1945), 8–14.

[9] *P. Erdös*, On the arithmetical density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers. Acta arithmetica **1** (1936), 197–200.

[10] *P. Erdös*, On the asymptotic density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers II. Trav. Inst. Math. Tbilissi **3** (1938), 217–224.

[11] *E. Härtter*, Ein Beitrag zur Theorie der Minimalbasen. J. reine u. ang. Math. **196** (1956), 170–204.

[12] *R. Henstock* und *M. Macbeath*, On the meusure of sum-sets I. Proc. London Math. Soc. **3**, 3 (1953), 182–194.

[13] *F. Kasch*, Abschätzung der Dichte von Summenmengen. Math. Zeitschr. **62** (1955), 368–387.

[14] *F. Kasch*, Abschätzung der Dichte von Summenmengen II. Math. Zeitschr. (im Druck).

[15] *H. Klöter*, Über wesentliche Komponenten in der additiven Zahlentheorie. Dissertation Köln 1948; 26 S. Maschinenschr.

[16] *H. Klöter* und *A. Stöhr*, Wesentliche Komponenten und asymptotische Dichte. J. reine u. ang. Math. **194** (1955), 210–217.

[17] *E. Landau*, Über einige neuere Fortschritte in der additiven Zahlentheorie. Cambridge Tracts **35**, Cambridge 1937.

[18] *B. Lepson*, Certain best possible results in the theory of Schnirelmann density. Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 592–594.

[19] *H. B. Mann*, A proof of the fundamental theorem on the density of sums of positive integers. Annals of Math. **43** (1942), 523–529.

[20] *H. H. Ostmann*, Beweis einer Vermutung über die asymptotische Dichte und Verschärfung einer Abschätzung für die Dichte der Summen zweier Zahlmengen. Dtsch. Math. **6** (1941/42), 213–247.

[21] *D. Raikov*, Über die Addition von Punktmengen im Sinne von Schnirelmann. Mat. Sbornik **5**, 47 (1939), 425–440.

[22] *H. Rohrbach*, Einige neuere Untersuchungen über die Dichte in der additiven Zahlentheorie. Jber. dtsch. Math.-Vereinig. **48** (1938), 201–236.

[23] *S. Selberg*, Note on a metrical problem in the additive theory of numbers. Arch. Math. Naturvidensk. **47** (1944), 111–118.

[24] *S. Selberg*, A survey of some recent results in additive number theory. Mat. Tidsskr. **A** (1949), 1–15.

[25] *H. N. Shapiro*, Some remarks on a theorem of Erdös concerning asymptotic density. Proc. Amer. Math. Soc. **1**, (1950), 590–592.

[26] *A. Stöhr*, Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie III. Neuer Beweis eines Satzes von A. Brauer. J. reine ang. Math. **195** (1955), 172–174.

Eingegangen 23. August 1957.

Über die Klasse der Gewichtsfunktionen bei der Verallgemeinerung des Dichtesatzes.

Von *Erich Härtter* in Mainz.

1. Der Mannsche Dichtesatz wurde von J. G. van der Corput [2] durch Einführung einer Gewichtsfunktion verallgemeinert, derart, daß an Stelle der Anzahlfunktion

$$A(x) = \sum_{\substack{1 \leq a \leq x \\ a \in \mathfrak{A}}} 1$$

für eine Menge $\mathfrak{A}$ nichtnegativer ganzer Zahlen eine modifizierte Anzahlfunktion

$$_gA(x) = \sum_{\substack{1 \leq a \leq x \\ a \in \mathfrak{A}}} g(a)$$

tritt mit einer Gewichtsfunktion $g(x)$, die gewissen Monotonie- und Wachstumsbedingungen unterliegt. H. Schell [5] überträgt nun den Mannschen Satz auf kontinuierliche lineare Punktmengen; dabei wird die Anzahlfunktion durch das Lebesguesche Maß ersetzt. Auch die van der Corputsche Verallgemeinerung des Mannschen Satzes läßt sich in entsprechender Weise übertragen, wobei man als Gewichtsfunktionen (reelle) Funktionen $f(x)$ mit folgenden, den van der Corputschen Bedingungen analogen Eigenschaften betrachtet:

(1) $f(x)$ *definiert in einem Intervall* $\mathfrak{J} = [0, \xi]$[1]),

(2) $f(x)$ *stetig in* $\mathfrak{J}$,

(3) $f(x) > 0$ *für* $x > 0$,

(4) $f(x_1) \leqq f(x_2)$ *für* $x_1 \leqq x_2$ $(x_1, x_2 \in \mathfrak{J})$,

(5) $f(x) f(x + 2t) \leqq f(x + t)^2$ *für alle* $x \geqq 0$ *und alle* $t \geqq 0$ *mit* $x + 2t \in \mathfrak{J}$.

Man überlegt sich leicht, daß diese fünf Bedingungen unabhängig voneinander sind.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $\mathfrak{J}$ alle nichtnegativen reellen Zahlen enthält, also $\mathfrak{J} = [0, +\infty)$ ist; denn wäre die Funktion $f(x)$ nur im Intervall $[0, \xi]$ definiert und besäße dort die Eigenschaften (1) bis (5), so können wir $f(x)$ fortsetzen auf das Intervall $[0, +\infty)$ durch die Festsetzung

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } 0 \leqq x \leqq \xi \\ f(\xi) & \text{für } x > \xi. \end{cases}$$

$F(x)$ erfüllt dann — wie man leicht nachprüft — in $\mathfrak{J} = [0, +\infty)$ die Eigenschaften (1) bis (5). Beim Nachweis der Eigenschaft (5) unterscheidet man hierbei am besten drei Fälle:

a) $x + 2t \leqq \xi$,

b) $x + t < \xi < x + 2t$,

c) $\xi \leqq x + t$.

[1]) $[0, \xi]$ bedeutet das abgeschlossene Intervall $0 \leqq x \leqq \xi$. Hierbei darf die obere Intervallgrenze auch $+\infty$ sein, also $\mathfrak{J} = [0, +\infty)$.

Während sich die Fälle a) und c) sofort erledigen, schließt man im Fall b) so:

$$F(x)\,F(\xi) \leqq F\left(\frac{x+\xi}{2}\right)^2$$

und wegen $F(x+2t) = F(\xi)$

$$F(x)\,F(x+2t) \leqq F\left(\frac{x+\xi}{2}\right)^2.$$

Aus $x + 2t > \xi$ folgt $2x + 2t > x + \xi$, also $x + t > \frac{x+\xi}{2}$ und wegen der Monotonie von $F(x)$ somit

$$F(x)\,F(x+2t) \leqq F(x+t)^2.$$

Die Klasse K der Funktionen, die diesen Bedingungen (1) bis (5) (mit $\mathfrak{J} = [0, +\infty)$) genügen, wollen wir hier betrachten.

2. Eine (reelle) Funktion $\varphi(x)$, die in einem Intervall $\mathfrak{J}$ definiert ist, soll in diesem Intervall *konkav* heißen, wenn für alle $x, x' \in \mathfrak{J}$ gilt

$$\frac{\varphi(x) + \varphi(x')}{2} \leqq \varphi\left(\frac{x+x'}{2}\right). \tag{6}$$

$\left(\text{Gilt } \frac{\varphi(x) + \varphi(x')}{2} \geqq \varphi\left(\frac{x+x'}{2}\right)\right.$, so nennen wir $\varphi(x)$ *konvex*.$\left.\right)$

Wenn in diesen Ungleichungen (für alle $x, x' \in \mathfrak{J}$) nur das Ungleichheitszeichen gilt, nennen wir $\varphi(x)$ *eigentlich konkav bzw. konvex*.

Mit obiger Definition äquivalent ist folgende Definition (vgl. Artin [1] und Haupt-Aumann [3]): Eine (reelle) Funktion $\varphi(x)$, die in einem Intervall $\mathfrak{J}$ definiert ist, soll in diesem Intervall konkav heißen, wenn der Differenzenquotient

$$\Phi(x', x) = \frac{\varphi(x') - \varphi(x)}{x' - x} \qquad (x' \neq x;\ x, x' \in \mathfrak{J}) \tag{7}$$

für jedes feste $x \in \mathfrak{J}$ eine nie zunehmende Funktion in x' ist.

Aus der Konkavität einer Funktion $\varphi(x)$ in einem offenen Intervall $\mathfrak{J}$ läßt sich die Stetigkeit von $\varphi(x)$ in $\mathfrak{J}$ folgern (vgl. Haupt-Aumann [3]) und aus (6) erhält man schärfer

$$\vartheta\,\varphi(x) + (1-\vartheta)\,\varphi(x') \leqq \varphi(\vartheta x + (1-\vartheta)\,x') \tag{8}$$

für alle $x, x' \in \mathfrak{J}$ *und alle* ϑ *mit* $0 \leqq \vartheta \leqq 1$.

Ungleichung (8) bedeutet geometrisch, daß die Sehne zwischen zwei Punkten der Kurve, die durch $y = \varphi(x)$ dargestellt wird, nie oberhalb des Kurvenbogens verläuft. Andererseits läßt sich die Relation (8) nicht nur aus dem Spezialfall $\vartheta = \frac{1}{2}$ herleiten, sondern aus jeder Ungleichung

$$\vartheta_0\,\varphi(x) + (1-\vartheta_0)\,\varphi(x') \leqq \varphi(\vartheta_0 x + (1-\vartheta_0)\,x') \qquad (0 < \vartheta_0 < 1,\ \textit{fest}) \tag{6a}$$

für alle x, x' aus dem Definitionsintervall $\mathfrak{J}$ von $\varphi(x)$ folgt (8). Der Beweis hierfür verläuft ganz entsprechend wie bei Haupt-Aumann [3] für den Sonderfall $\vartheta_0 = \frac{1}{2}$ oder man beweist indirekt. Somit können wir in der Definition für die konkaven Funktionen an Stelle der Ungleichung (6) auch (6a) setzen.

Weiter soll eine Funktion $f(x)$, die in einem Intervall $\mathfrak{J}$ definiert ist, in diesem Intervall *logarithmisch konkav* (*konvex*) heißen, wenn sie positiv ist und wenn außerdem

die Funktion $\log f(x)$ in $\mathfrak{J}$ konkav (konvex) ist[2]). Mit dieser Definition läßt sich Eigenschaft (5) dann auch so ausdrücken:

(5a) $\qquad f(x)$ *logarithmisch konkav in* $\mathfrak{J}' = (0, +\infty)$.

Denn aus (5) folgt sofort

$$\frac{\log f(x) + \log f(x+2t)}{2} \leqq \log f(x+t) \tag{9}$$

für alle $x > 0$ und alle $t \geqq 0$. Umgekehrt erhält man aus (9)

$$e^{\log f(x)}\, e^{\log f(x+2t)} \leqq e^{\log f(x+t)^2},$$

also (5)[3]).

Wegen (6a) gilt dann an Stelle von (9) auch

$$\vartheta_0 \log f(x) + (1-\vartheta_0) \log f(x+2t) \leqq \log f(\vartheta_0 x + (1-\vartheta_0)(x+2t)) \tag{10}$$

für alle $x > 0$ *und alle* $t \geqq 0 \qquad (0 < \vartheta_0 < 1)$,

also kann man für (5) auch setzen

$$f(x)^{\vartheta_0} f(x+2t)^{1-\vartheta_0} \leqq f(\vartheta_0 x + (1-\vartheta_0)(x+2t)) \tag{5b}$$

für alle $x \geqq 0$ *und alle* $t \geqq 0 \qquad (0 < \vartheta_0 < 1$, fest).

3. Sei K' die Klasse der Funktionen $\varphi(x)$ mit

(1′) $\varphi(x)$ *definiert in* $\mathfrak{J}' = (0, +\infty)$, $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x)$ *entweder vorhanden oder* $-\infty$,

(4′) $\varphi(x_1) \leqq \varphi(x_2)$ *für* $x_1 \leqq x_2 \qquad (x_1, x_2 \in \mathfrak{J}')$,

(5′) $\varphi(x)$ *konkav in* $\mathfrak{J}'$, *d. h.* $\dfrac{\varphi(x) + \varphi(x')}{2} \leqq \varphi\left(\dfrac{x+x'}{2}\right)$ *für alle* $x, x' \in \mathfrak{J}'$

oder $\dfrac{\varphi(x) + \varphi(x+2t)}{2} \leqq \varphi(x+t)$ *für alle* $x > 0$, $t \geqq 0$.

Nach Nr. 2 ist dann $\varphi(x)$ auch stetig in $\mathfrak{J}'$,

Durch die Festsetzung

$$\varphi(x) = \log f(x) \ (x > 0), \ f(x) \in K,$$

und

$$\begin{cases} f(x) = e^{\varphi(x)} & (x > 0), \\ f(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) \in K', \end{cases}$$

läßt sich dann jeder Funktion aus K eindeutig eine Funktion aus K' zuordnen und umgekehrt, d. h. die Klassen K und K' sind äquivalent.

Als Folgerung hieraus ergibt sich, daß mit $f(x) \in K$ auch $\log f(x)$ zu K gehört, sofern $f(x) > 1$ ist für $x > 0$.

---

[2]) *Jede in einem Intervall* $\mathfrak{J}$ *positive konkave Funktion* $\varphi(x)$ *ist in* $\mathfrak{J}$ *auch logarithmisch konkav.*
Beweis. Aus $\dfrac{\varphi(x) + \varphi(x')}{2} \leqq \varphi\left(\dfrac{x+x'}{2}\right)$
folgt, da das arithmetische Mittel zweier positiver Zahlen immer größer oder gleich ihrem geometrischen Mittel ist, $\sqrt[+]{\varphi(x)\,\varphi(x')} \leqq \varphi\left(\dfrac{x+x'}{2}\right)$, also

$$\frac{\log \varphi(x) + \log \varphi(x')}{2} \leqq \log \varphi\left(\frac{x+x'}{2}\right).$$

[3]) Der Punkt $x = 0$ muß hierbei ausgeschlossen werden, weil $f(x)$ für $x = 0$ eventuell verschwindet. Eigenschaft (5) ergibt sich dann für $x = 0$ durch einen Grenzübergang $x \to 0$ bei festem t.

Ferner gilt als Verschärfung von (5): *Sei* $x_1 \leqq x_2 \leqq x_0 \leqq x_3 \leqq x_4$ *und*

$$x_0 = \vartheta_0 x_2 + (1 - \vartheta_0)\, x_3 = \eta_0 x_1 + (1 - \eta_0)\, x_4 \qquad (0 < \vartheta_0 < 1,\ 0 < \eta_0 < 1,\ \textit{fest}).$$

Dann ist

$$f(x_1)^{\eta_0} f(x_4)^{1-\eta_0} \leqq f(x_2)^{\vartheta_0} f(x_3)^{1-\vartheta_0} \leqq f(x_0), \tag{11}$$

oder für $\vartheta_0 = \eta_0 = \frac{1}{2}$ (*d. h.* $x_0 - x_1 = x_4 - x_0$, $x_0 - x_2 = x_3 - x_0$)

$$f(x_1)\, f(x_4) \leqq f(x_2)\, f(x_3) \leqq f(x_0)^2.$$

Beweis. Für die (konkave) Funktion $\varphi(x) = \log f(x)$ gilt wegen (8)

$$\eta_0\, \varphi(x_1) + (1 - \eta_0)\, \varphi(x_4) \leqq \vartheta_0\, \varphi(x_2) + (1 - \vartheta_0)\, \varphi(x_3) \leqq \varphi(x_0).$$

(Wenn $x_1 = 0$ ist, vgl. Fußnote [3]).)

4. Auf Grund der Bemerkung in Nr. 2 über die Stetigkeit einer konkaven Funktion genügt es, in Eigenschaft (2) nur die Stetigkeit für $f(x)$ in $x = 0$ zu fordern. Die Notwendigkeit dieser Forderung zeigt das Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0. \\ 1 & \text{„} \quad x > 0. \end{cases}$$

Weiter kann die Eigenschaft (5) durch die schwächere Forderung

(5c) $f(x)\, f(x + 2t) \leqq f(x + t)^2$ *für alle* $x \geqq 0$ *und alle* t *mit* $\varepsilon \geqq t \geqq 0$ ($\varepsilon > 0$, *fest*)

ersetzt werden. (Und entsprechend dann auch (5a) und (5b))

Beweis. Sei $x_2 = x_1 + t$ $(0 \leqq t \leqq \varepsilon)$. Dann gilt

$$f(x_2)\, f(x_2 + 2t) \leqq f(x_2 + t)^2$$

oder

$$f(x_1 + t)\, f(x_1 + t + 2t) \leqq f(x_1 + 2t)^2.$$

Wendet man Forderung (5c) auf $x = x_1 + 2t$ bzw. $x = x_1$ an, so erhält man

$$f(x_1 + 2t + t) \geqq \sqrt{f(x_1 + 2t)\, f(x_1 + 4t)}$$

bzw.

$$f(x_1 + t) \geqq \sqrt{f(x_1)\, f(x_1 + 2t)}$$

und somit

$$\sqrt{f(x_1)\, f(x_1 + 2t)^2 f(x_1 + 4t)} \leqq f(x_1 + 2t)^2$$

und durch Quadrieren

$$f(x_1)\, f(x_1 + 4t) \leqq f(x_1 + 2t)^2,$$

wobei $f(x_1 + 2t) \neq 0$ angenommen ist (für $f(x_1 + 2t) = 0$ ist diese Ungleichung trivial), d. h. (5c) gilt auch für alle t mit $2\varepsilon \geqq t \geqq 0$. Hieraus folgt aber durch wiederholte Anwendung der Schlußweise die Gültigkeit von (5).

5. Aus den Bedingungen (1) bis (5) folgen sofort

Satz 1. *Ist* $f(x) \in K$ *mit* $f(0) \geqq 1$, *dann ist* $f(2x) \leqq f(x)^2$.

Beweis. Aus Eigenschaft (5) folgt $f(0)\, f(2t) \leqq f(t)^2$.

Satz 2. *Jede Funktion $f(x) = c$ $(c > 0)$ gehört zu K, weiterhin die Funktion $f(x) = x$*[4]).

Satz 3. *Mit zwei Funktionen $f(x)$, $g(x) \in K$ ist auch das Produkt $f(x)\,g(x) \in K$, d. h. K ist bezüglich der Multiplikation abgeschlossen.*

Satz 4. *Sei $f(x) \in K$ und $\alpha \geqq 0$. Dann ist auch $f(x)^\alpha \in K$.*

Insbesondere gehört dann jede Funktion $f(x) = x^\alpha (\alpha \geqq 0)$ zu K.

Satz 5. *Sei $f(x) \in K$ und $g(x)$ eine für alle reellen $x \geqq 0$ definierte, höchstens für $x = 0$ verschwindende, sonst positive, stetige, nicht abnehmende, konkave Funktion. Dann ist auch $F(x) = f(g(x)) \in K$.*

Beweis. Für $F(x)$ ergeben sich die Eigenschaften (1) bis (4) sofort. Aus $\dfrac{g(x) + g(x+2t)}{2} \leqq g(x+t)$ für alle $x \geqq 0$ und alle $t \geqq 0$ folgt

$$T = g(x+t) - g(x) \geqq S = g(x+2t) - g(x+t) \geqq 0$$

und damit

$$\begin{aligned} f(g(x))\,f(g(x) + 2T) &\leqq f(g(x) + T)^2, \\ f(g(x))\,f(g(x) + S + T) &\leqq f(g(x) + T)^2, \\ f(g(x))\,f(g(x+2t)) &\leqq f(g(x+t))^2. \end{aligned}$$

Folgerung: Mit $f(x) \in K$ liegt auch $f(ax+c)^\alpha$ $(a > 0,\ c \geqq 0,\ \alpha \geqq 0)$ in K, insbesondere also $f(x) = (ax+c)^\alpha$.

Satz 6. *Alle Polynome mit reellen nichtnegativen Koeffizienten*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (a_\nu \geqq 0,\ a_n \neq 0),$$

die nur reelle Nullstellen haben, gehören zu K.

Beweis. Da $p(x)$ nichtnegative Koeffizienten hat, können die reellen Nullstellen nicht positiv sein. Also hat $p(x)$ eine Darstellung

$$p(x) = C(x+b_1)(x+b_2)\cdots(x+b_n) \qquad (b_\nu \geqq 0,\ C > 0);$$

in diesem Produkt gehört aber jeder Faktor zu K.

Satz 7. *Sei $b \geqq 1$ und $g(x)$ eine für alle reellen $x \geqq 0$ definierte, stetige, nicht abnehmende, konkave Funktion. Dann ist $b^{g(x)} \in K$.*

Beweis. Die Eigenschaften (1) bis (4) sind wieder trivial. Eigenschaft (5) folgt aus

$$\frac{g(x) + g(x+2t)}{2} \leqq g(x+t) \text{ für alle } x \geqq 0,\ t \geqq 0,$$

$$\frac{g(x)\log b + g(x+2t)\log b}{2} \leqq g(x+t)\log b,$$

$$\frac{\log b^{g(x)} + \log b^{g(x+2t)}}{2} \leqq \log b^{g(x+t)}.$$

Insbesondere gehört dann $e^{x^\alpha} (0 \leqq \alpha \leqq 1)$ zu K. Die Funktion $f(x) = e^x$ stellt nun auch in gewisser Weise eine obere Schranke für die Funktionen aus K dar, denn $f(x) = e^{x^\alpha} (\alpha > 1)$ liegt nicht in K, da in diesem Fall die Funktion x^α konvex ist, also $\dfrac{\log e^{x^\alpha} + \log e^{(x+2t)^\alpha}}{2} > \log e^{(x+t)^\alpha}$ ist. (Für $\alpha < 0$ ist e^{x^α} eine abnehmende Funktion.)

---

[4]) Verlangt man an Stelle von (3) schärfer $f(x) > 0$ für $x \geqq 0$, so gelten die Sätze im wesentlichen auch in diesem Fall; jedoch gehört dann x^α nicht zu der Funktionenklasse.

Satz 8. *Sei $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \cdots$ eine Folge von Funktionen aus K, die gegen eine Grenzfunktion $f(x)$ konvergieren möge. Dann gehört auch $f(x)$ zu K, wenn $f(x)$ für $x > 0$ nicht verschwindet.*

Beweis. Man schließt analog wie bei Artin [1], wobei man nur einige Ungleichheitszeichen umzukehren hat.

Folgerung: Sind die Funktionen $f_n(x) \in K (n = 1, 2, \ldots)$ und konvergiert das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, so gehört auch dieses zu K.

Satz 9. *Die einzigen Funktionen aus K, die die Bedingung* (5) *mit dem Gleichheitszeichen erfüllen, sind die Funktionen $f(x) = ab^x (a > 0, b \geqq 1)$.*

Beweis. Sei $f(x) \in K$ mit $f(x) f(x + 2t) = f(x + t)^2$. Dann ist

$$\log f(x) + \log f(x + 2t) = 2 \log f(x + t) \qquad (x > 0,\ t \geqq 0)$$

und, wenn wir zur Abkürzung $\log f(x) = \varphi(x)$ setzen, $\dfrac{\varphi(x) + \varphi(x + 2t)}{2} = \varphi(x + t)$ für alle $x > 0$, $t \geqq 0$. Das bedeutet, daß $\varphi(x)$ eine Gerade darstellt, also $\varphi(x) = mx + n$ ist mit $m \geqq 0$ wegen der Monotonie von $f(x)$. Also ist $f(x) = e^{\varphi(x)} = e^{mx+n} = e^n (e^m)^x = ab^x$ $(a > 0,\ b \geqq 1)$ [5]).

Folgerung: Es gibt keine Funktion $f(x) \in K$ mit $f(0) = 0$ und $f(x) f(x + 2t) = f(x + t)^2$ für alle $x \geqq 0$ und $t \geqq 0$.

6. Satz 3 besagte, daß mit zwei Funktionen $f(x)$, $g(x) \in K$ auch deren Produkt $f(x) g(x)$ zu K gehört. Jedoch folgt nicht, daß mit zwei Funktionen $f(x)$, $g(x) \in K$ auch die Summe $f(x) + g(x)$ Element von K ist. Es gilt nämlich folgender

Satz 10. *Sei $f(x) \in K$ mit $f(x_0) f(x_0 + 2t_0) < f(x_0 + t_0)^2$ und*

$$\frac{f(x_0) + f(x_0 + 2t_0)}{2} > f(x_0 + t_0)$$

für gewisse Werte x_0, t_0 (z. B. $f(x) = x^2$ erfüllt diese Bedingungen). Dann gibt es eine positive Konstante c mit der Eigenschaft, daß

$$(f(x_0) + c)\,(f(x_0 + 2t_0) + c) > (f(x_0 + t_0) + c)^2$$

ist.

Beweis. Sei $f(x_0) f(x_0 + 2t_0) + \delta = f(x_0 + t_0)^2$ $(\delta > 0)$; dann wählen wir

$$c > \frac{\delta}{f(x_0 + 2t_0) + f(x_0) - 2f(x_0 + t_0)}.$$

Daraus folgt

$$c\,(f(x_0 + 2t_0) + f(x_0)) > \delta + 2cf(x_0 + t_0),$$

$$f(x_0) f(x_0 + 2t_0) + \delta + c\,(f(x_0 + 2t_0) + f(x_0)) + c^2 > f(x_0 + t_0)^2 + \delta + 2cf(x_0 + t_0) + c^2,$$

$$(f(x_0) + c)\,(f(x_0 + 2t_0) + c) > (f(x_0 + t_0) + c)^2.$$

Bemerkung: Fordert man an Stelle der logarithmischen Konkavität schärfer die einfache Konkavität, dann ist mit zwei konkaven Funktionen auch deren Summe konkav. Jedoch braucht die Summe einer konkaven und einer konvexen Funktion aus K nicht wieder in K zu liegen, wie das Beispiel $\sqrt{x} + e^x$ unter Benutzung von Satz 12 zeigt.

---

[5]) Auf Grund von Haupt-Aumann [3], 4. 8. 3, Satz 1, II, genügt es, $f(x) f(x + 2t) = f(x + t)^2$ nur für ein festes $t_0 > 0$ und alle x einer monoton gegen $+\infty$ gehenden Folge $\{x_n\}$ mit $x_0 = 0$ und $x_{n+1} < x_n + 2t_0$ zu fordern.

Satz 10 wird verschärft durch folgende Aussagen:

Satz 11. *Sei $f(x) \in K$ eigentlich konvex mit $f(0) = 0$ und $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(2t)}{f(t)} > 2$. Dann ist $f(x) + c \notin K$ $(c > 0)$.*

Beweis. Angenommen, $f(x) + c$ wäre unter den genannten Voraussetzungen Element von K. Dann wäre

$$(f(x) + c)\,(f(x + 2t) + c) \leqq (f(x + t) + c)^2 \quad \text{für alle } x \geqq 0,\ t \geqq 0,$$

also

$$c \leqq \frac{f(x + t)^2 - f(x)\,f(x + 2t)}{f(x) + f(x + 2t) - 2f(x + t)} \quad \text{für alle } x \geqq 0,\ t > 0.$$

(Der Nenner ist positiv, da $f(x)$ eigentlich konvex vorausgesetzt wurde.) Wegen $f(0) = 0$ folgt

$$c \leqq \frac{f(t)^2}{f(2t) - 2f(t)} = \frac{f(t)}{\frac{f(2t)}{f(t)} - 2}$$

und wegen der Voraussetzung über den Grenzwert und der Stetigkeit von $f(x)$ erhält man für $t \to 0$

$$c \leqq 0,$$

was einen Widerspruch bedeutet.

Zum Beispiel erfüllt die Funktion $f(x) = x^\alpha$ $(\alpha > 1)$ die Voraussetzungen von Satz 11, d. h. $x^\alpha + c \notin K$ für $c > 0$. — Die Notwendigkeit der Voraussetzung über den Grenzwert zeigt die Funktion $e^x - 1$, die zu K gehört. Es ist nämlich $\lim\limits_{t \to 0} \frac{e^{2t} - 1}{e^t - 1} = 2$ und $(e^x - 1) + 1 = e^x \in K$.

Satz 12. *Jede Funktion $ab^x + f(x)$ $(a > 0,\ b > 1,\ f(x) \in K)$ mit $\frac{f(t)}{b^t} \to 0$ für $t \to \infty$ ist kein Element von K.*

Beweis. Angenommen, es wäre $ab^x + f(x) \in K$; dann wäre

$$(ab^x + f(x))\,(ab^{x+2t} + f(x + 2t)) \leqq (ab^{x+t} + f(x + t))^2 \text{ für alle } x \geqq 0,\ t \geqq 0$$

und nach Division durch $a^2 b^{x+2t}$

$$\frac{f(x + 2t)}{ab^{2t}} + \frac{f(x)}{a} + \frac{f(x)\,f(x + 2t)}{a^2 b^{x+2t}} \leqq \frac{2f(x + t)}{ab^t} + \frac{f(x + t)^2}{a^2 b^{x+2t}}.$$

Läßt man hierin nun t gegen unendlich gehen bei festem x, so strebt die linke Seite dieser Ungleichung gegen $\frac{f(x)}{a}$, die rechte Seite jedoch gegen 0, was einen Widerspruch bedeutet.

Insbesondere ist dann jede Funktion $ab^x + c$ $(a > 0,\ b > 1,\ c > 0)$ kein Element von K.

Satz 13. *Sei $f(x) \in K$ und $f(0) = D$. Dann ist $f(x) - c \in K$, wenn $0 \leqq c \leqq D$ ist.*

Beweis. Die Eigenschaften (1) bis (4) ergeben sich für $f(x) - c$ sofort. Entweder ist für ein Wertepaar x, t

$$\frac{f(x) + f(x + 2t)}{2} \leqq f(x + t),$$

dann erhalten wir sofort

$$\frac{(f(x) - c) + (f(x + 2t) - c)}{2} \leqq f(x + t) - c,$$

d. h. somit auch

$$(f(x)-c)\,(f(x+2t)-c) \leqq (f(x+t)-c)^2,$$

oder es ist

$$\frac{f(x)+f(x+2t)}{2} > f(x+t),$$

dann folgt

$$f(x)\,f(x+2t) - c\,(f(x)+f(x+2t)) + c^2 \leqq f(x+t)^2 - 2cf(x+t) + c^2,$$

$$(f(x)-c)\,(f(x+2t)-c) \leqq (f(x+t)-c)^2.$$

Also gilt auch Eigenschaft (5).

7. Sind $f(x)$, $g(x)$ zwei Funktionen aus K mit $f(\xi) = g(\xi)$. Dann besteht die Frage, ob auch

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } 0 \leqq x \leqq \xi \\ g(x) & \text{für } x > \xi \end{cases} \tag{12}$$

zu K gehört. Der Spezialfall $g(x) = c$ wurde in Nr. 1 schon behandelt. Wir zeigen hier

Satz 14. *Ist $F(x)$ durch (12) definiert und*

$$g(x) \leqq f(x) \text{ in einem Intervall } [\xi, \xi+\delta]\ (\delta > 0), \tag{13}$$

so gehört $F(x)$ zu K[6]).

Beweis. Die zu (12) zugehörige Funktion

$$\Phi(x) = \begin{cases} \log f(x) & \text{für } 0 < x \leqq \xi \\ \log g(x) & \text{für } x > \xi \end{cases}$$

gehört zur Klasse K'. Dabei erkennt man die Eigenschaft (5′) aus der Voraussetzung (13).

Satz 14 läßt sich dann auch so formulieren, daß das Minimum von endlich vielen Funktionen aus K wieder zu K gehört, also z. B. ist

$$\min\,(a_1x + c_1,\ a_2x + c_2, \ldots, a_nx + c_n) \in K \qquad (a_i \geqq 0,\ c_i \geqq 0,\ a_i + c_i \neq 0).$$

Satz 15. *Ist*

$$F(x) = \begin{cases} c & \text{für } 0 \leqq x \leqq \xi \\ g(x) \neq c & \text{für } x > \xi, \end{cases} \qquad (c > 0,\ \xi > 0)$$

so gehört $F(x)$ nicht zu K.

Beweis. Sei $x + t < \xi < x + 2t$. Wegen $g(x+2t) > c$ ist $cg(x+2t) > c^2$.

8. Analog wie bei Artin [1] läßt sich zeigen, daß für eine in einem Intervall $\mathfrak{J}$ konkave zweimal stetig differenzierbare Funktion $\varphi(x)$ gilt

$$\varphi''(x) \leqq 0 \text{ für jedes } x \in \mathfrak{J}, \tag{14}$$

und umgekehrt.

Ist nun die Funktion $f(x) \in K$ zweimal stetig differenzierbar, so können wir Eigenschaft (5) auch ersetzen durch

$$f(x)\,f''(x) \leqq (f'(x)) \text{ für jedes } x \geqq 0. \tag{5d}$$

Beweis. Nach (5a) muß $\log f(x)$ konkav sein, also nach (14) gilt $(\log f(x))'' \leqq 0$ für jedes $x > 0$. Jedoch ist

$$(\log f(x))'' = \frac{f(x)\,f''(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2},$$

also

$$f(x)\,f''(x) \leqq (f'(x))^2 \text{ für alle } x > 0.$$

[6]) Beim Beweis wird nur benutzt, daß $g(x)$ in $[\xi, +\infty)$ die Eigenschaften (1) bis (5) erfüllt.

Wegen der Stetigkeit gilt diese Relation dann auch für $x = 0$, womit die Behauptung gezeigt ist.

Auf Grund von (5d) läßt sich wieder leicht die Aussage über die Exponentialfunktion aus Nr. 5 nachweisen. — Andererseits gilt für die Gammafunktion die Ungleichung $\Gamma(x)\,\Gamma''(x) > (\Gamma'(x))^2$ (Artin [1], S. 16), so daß diese nicht zu K gehören kann.

Wir beweisen weiter

Satz 16. *Ist die (eigentlich konvexe) Funktion $f(x) \in K$ zweimal stetig differenzierbar mit $f''(x) \neq 0$ für alle $x \geqq 0$ und $f(0) = 0$, so ist $f(x) + c \notin K$, wenn $c > \dfrac{f'(0)^2}{f''(0)}$ ist.*

Beweis. Neben $f(x)\,f''(x) \leqq f'(x)^2$ muß noch gelten $(f(x) + c)\,f''(x) \leqq f'(x)^2$ für jedes $x \geqq 0$, d. h.

$$c \leqq \frac{f'(x)^2 - f(x)\,f''(x)}{f''(x)} \quad \text{für alle } x \geqq 0.$$

Setzen wir nun $x = 0$, so ist wegen $f(0) = 0$

$$c \leqq \frac{f'(0)^2}{f''(0)}.$$

Beispiel: Für $f(x) = e^x - 1$ ist $c \leqq 1$.

9. J. G. van der Corput [2] benutzt bei der Verallgemeinerung des Mannschen Satzes Gewichtsfunktionen $g(x)$, die nur für ganzzahlige Werte x definiert sind. Die Eigenschaften dieser Funktionen lauten im einzelnen:

(1*) $g(x)$ *definiert für alle* $x \in \mathfrak{J}$, $\mathfrak{J} = \{1, 2, \ldots, m\}$,

(3*) $g(x) > 0$ *für* $x \in \mathfrak{J}$,

(4*) $g(x_1) \leqq g(x_2)$ *für* $x_1 \leqq x_2 \qquad (x_1, x_2 \in \mathfrak{J})$,

(5*) $g(x)\,g(x+2) \leqq g(x+1)^2$ *für alle* $x \in \mathfrak{J}$, $x + 2 \in \mathfrak{J}$.

Wir können wieder o. B. d. A. annehmen, daß $\mathfrak{J}$ alle natürlichen Zahlen enthält, indem wir nämlich für alle $x > m$ setzen $g(x) = g(m)$.

Jeder solchen Gewichtsfunktion $g(x)$ ordnen wir nun — entsprechend wie in Nr. 3 — eine Funktion $\psi(x) = \log g(x)$ zu. Dann erfüllt $\psi(x)$ die Bedingungen

(1*′) $\psi(x)$ *definiert in* $\mathfrak{J}$,

(4*′) $\psi(x_1) \leqq \psi(x_2)$ *für* $x_1 \leqq x_2 \qquad (x_1, x_2 \in \mathfrak{J})$,

(5*′) $\dfrac{\psi(x) + \psi(x+2)}{2} \leqq \psi(x+1)$ *für alle* $x \in \mathfrak{J}$, $x + 2 \in \mathfrak{J}$.

Und umgekehrt erhält man zu einer beliebigen Funktion $\psi(x)$ mit den Eigenschaften (1*′), (4*′) und (5*′) durch die Festsetzung

$$g(x) = e^{\psi(x)}$$

eine Funktion $g(x)$ mit den Eigenschaften (1*), (3*), (4*) und (5*). Sei $\psi(x)$ eine beliebige Funktion mit (1*′), (4*′) und (5*′). Wir definieren diese Funktion auch für nichtganzzahlige reelle $x \geqq 0$ durch folgende Festsetzung: Sei x_0 eine beliebige natürliche Zahl aus $\mathfrak{J}$ und $x_0 \leqq x \leqq x_0 + 1$; wir setzen

$$\varphi(x) = (\psi(x_0 + 1) - \psi(x_0))\,(x - x_0) + \psi(x_0)$$

und für $0 \leqq x \leqq 1$

$$\varphi(x) = (\psi(2) - \psi(1))\,(x - 1) + \psi(1),$$

d. h. geometrisch, daß wir die Funktion $\varphi(x)$ aus Geradenstücken zusammensetzen. $\varphi(x)$ gehört dann zur Klasse K' und somit

$$f(x) = e^{\varphi(x)}$$

zur Klasse K. Für alle natürlichen Zahlen haben $f(x)$ und $g(x)$ die gleichen Funktionswerte, d. h. $g(x)$ ist damit auf nichtganzzahlige Argumente x verallgemeinert.

Insbesondere dürfen wir nun an Stelle von (5*) auch setzen

$$g(x)\, g(x + 2t) \leqq g(x + t)^2 \textit{ für alle natürlichen Zahlen } x \textit{ und } t.$$

Im übrigen gelten dann zu den früheren Sätzen entsprechende Aussagen.

H. Rohrbach und B. Volkmann [4] verallgemeinern nun auch den Kneserschen Dichtesatz durch Einführung von Gewichten Die Klasse der zulässigen Gewichtsfunktionen wird dabei enger gefaßt als bei der Verallgemeinerung des Mannschen Satzes, denn von einer Gewichtsfunktion $f(x)$ wird hier unter anderm noch

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x + c)}{f(x)} = 1 \text{ für jedes } c \gtreqless 0 \tag{15}$$

verlangt. Diese Eigenschaft (15) wird jedoch z. B. von der Funktion e^x, die, wie oben dargelegt, zur Klasse K gehört, nicht erfüllt.

Literaturverzeichnis.

[1] *E. Artin*, Einführung in die Theorie der Gammafunktion (1931), 5—8.
[2] *J. G. van der Corput*, On sets of integers II. Proc. Acad. Sci. Amsterdam **50** (1947), insbes. 344—350 (§3).
[3] *O. Haupt-G. Aumann*, Differential- und Integralrechnung I. Berlin (1948), insbes. 106—112 (Abschn. 4. 8).
[4] *H. Rohrbach* und *B. Volkmann*, Verallgemeinerte asymptotische Dichten. Journ. reine u. angew. Math. **194** (1955), 195—209.
[5] *H. Schell*, Über einige Probleme der Addition von linearen Funktmengen. Journ. reine und angew. Math. **200** (1958), 52—88.

Eingegangen 8. Januar 1958.

Über das allgemeine Rédeische schiefe Produkt.

Von *Fritz Rühs* in Freiberg/Sa.

1. Problemstellung.

In neuerer Zeit haben sich einige Autoren mit den sogenannten „schiefen Produkten" beschäftigt, auf deren besondere Rolle in der Gruppentheorie L. Rédei in einer grundlegenden Arbeit [2] hingewiesen hat. Dortselbst definiert Rédei einen gewissen Typ eines schiefen Produktes, das er mit $G \circ \Gamma$ bezeichnet und das wir das Rédeische schiefe Produkt nennen wollen. Es wird folgendermaßen erklärt: Sind G und Γ zwei beliebige Gruppen, so besteht $G \circ \Gamma$ aus den Elementepaaren (a, α) mit $a \in G$, $\alpha \in \Gamma$, zwischen denen eine Produktbildung erklärt ist durch das Multiplikationsgesetz

$$G \circ \Gamma : (a, \alpha)\,(b, \beta) = (ab^{\alpha}\beta^{\alpha},\ a^{b}\alpha^{b}\beta).$$

Hierin sind $b^{\alpha}, \beta^{\alpha} \in G$, $a^{b}, \alpha^{b} \in \Gamma$ gewisse Funktionen der angegebenen Argumente. Rédei beschränkt sich in [2] im wesentlichen auf die Angabe der Bedingungen, unter denen das schiefe Produkt $G \circ \Gamma$ eine Gruppe ist.

Insbesondere nennt man nun das schiefe Produkt $G \circ \Gamma$ k-fach ausgeartet, wenn genau k der vier Relationen

$$b^{\alpha} = b,\ \beta^{\alpha} = e,\ a^{b} = \varepsilon,\ \alpha^{b} = \alpha$$

identisch erfüllt sind. Den Fall, in dem keine dieser vier Relationen identisch erfüllt ist, wollen wir als den nichtausgearteten bezeichnen; über ihn sind im wesentlichen nur die Bedingungen bekannt, unter denen er eine Gruppe darstellt. Hingegen konnte man über die ein- und zweifach ausgearteten Fälle gewisse Aussagen machen. (Die dreifach ausgearteten Fälle sind Spezialfälle der zweifach ausgearteten; im vierfach ausgearteten Fall ist offenbar $G \circ \Gamma$ das direkte Produkt der Gruppen G und Γ.)

Es gibt im wesentlichen vier verschiedene zweifach ausgeartete schiefe Produkte, die mit $G\,1\,\Gamma$ bis $G\,4\,\Gamma$ bezeichnet werden. Eine besondere Rolle spielen die Gruppen $G\,1\,\Gamma$ und $G\,2\,\Gamma$, die durch folgende Multiplikationsgesetze definiert werden:

$$G\,1\,\Gamma:\ (a, \alpha)\,(b, \beta) = (ab,\ a^{b}\alpha^{b}\beta),$$
$$G\,2\,\Gamma:\ (a, \alpha)\,(b, \beta) = (ab^{\alpha},\ \alpha^{b}\beta).$$

Die Gruppen $G\,2\,\Gamma$ sind die sogenannten Zappa-Szép-Produkte, während die Gruppen $G\,1\,\Gamma$ mit den Schreierschen Erweiterungen der Gruppe Γ durch die Gruppe G identisch sind. Die übrigen zweifach ausgearteten Gruppen, definiert durch die Multiplikationsgesetze

$$G\,3\,\Gamma:\ (a, \alpha)\,(b, \beta) = (ab\beta^{\alpha},\ a^{b}\alpha\beta),$$
$$G\,4\,\Gamma:\ (a, \alpha)\,(b, \beta) = (ab^{\alpha},\ a^{b}\alpha\beta)$$

sind eingehend von R. Kochendörffer [1] untersucht worden. Sie lassen sich beide auffassen als eine zweimalige Schreiersche Erweiterung gewisser Untergruppen. Im Anschluß hieran stellte L. Rédei [3] die Frage, ob etwas Ähnliches auch für das allgemeine

schiefe Produkt $G \circ \Gamma$ gilt. In der Tat gelang es uns [4], diese Frage noch bejahend im Fall der einfach ausgearteten Gruppen zu beantworten. Es gibt im wesentlichen zwei verschiedene einfach ausgeartete schiefe Produkte. Definieren wir die Gruppe $G * \Gamma$ durch das Multiplikationsgesetz

$$G * \Gamma : (a, \alpha)(b, \beta) = (ab\beta^{\alpha},\ a^b \alpha^b \beta),$$

so erweist sich $G * \Gamma$ ebenfalls als eine zweimalige Schreiersche Erweiterung gewisser Untergruppen, während die andere einfach ausgeartete Gruppe $G ** \Gamma$, definiert durch das Multiplikationsgesetz

$$G ** \Gamma : (a, \alpha)(b, \beta) = (ab^{\alpha},\ a^b \alpha^b \beta),$$

eine einfache Schreiersche Erweiterung einer gewissen Untergruppe durch ein Zappa-Szép-Produkt ist.

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit vorwiegend mit dem nichtausgearteten Fall. Die Beantwortung der Rédeischen Frage in diesem Fall ist wegen der komplizierten Struktur der Gruppe $G \circ \Gamma$ recht schwierig. Das ist auch nicht weiter verwunderlich, enthält doch die Theorie des allgemeinen schiefen Produktes $G \circ \Gamma$ die ihrem Wesen nach sehr verschiedenen Theorien von Schreier und Zappa-Szép. Obwohl die Struktur der Gruppe $G \circ \Gamma$ durch nicht weniger als elf Relationen beschrieben wird, erweisen sich diese doch noch als zu allgemein, um eine definitive Antwort auf die Rédeische Frage mit den bisher bekannten Methoden geben zu können. Immerhin werden wir auch im allgemeinen Fall einige Sätze angeben, wann sich die nichtausgeartete Gruppe $G \circ \Gamma$ als eine Schreiersche Erweiterung erweist. Das ist insbesondere immer dann der Fall, wenn die Gruppen G und Γ abelsch oder Hamiltonsche Gruppen sind. Insbesondere werden sich einige der ein- und zweifach ausgearteten Fälle als Spezialfälle dieser allgemeinen Sätze ergeben.

2. Das allgemeine schiefe Produkt $G \circ \Gamma$.

Es seien G und Γ zwei beliebige Gruppen mit den Elementen $a, b, c, \ldots \in G$ bzw. $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \in \Gamma$. $e \in G$ bzw. $\varepsilon \in \Gamma$ seien ihre Einselemente. Dann besteht das allgemeine Rédeische schiefe Produkt $G \circ \Gamma$ aus der Gesamtheit der Elementepaare (a, α) mit $a \in G$, $\alpha \in \Gamma$, zwischen denen eine Produktbildung erklärt ist durch das Multiplikationsgesetz

$$\text{(M)} \qquad G \circ \Gamma : (a, \alpha)(b, \beta) = (ab^{\alpha}\beta^{\alpha},\ a^b \alpha^b \beta).$$

Hierin sind $b^{\alpha}, \beta^{\alpha}$ bzw. a^b, α^b gewisse Funktionen der angegebenen Argumente, deren Werte Elemente aus G bzw. aus Γ sind. Wir können und wollen mit Rédei [2] dabei annehmen, daß das Elementepaar (e, ε) das Einheitselement von $G \circ \Gamma$ ist. Das assoziative Gesetz für die Gruppe $G \circ \Gamma$ ist dann gleichbedeutend mit der Gültigkeit der folgenden Relationen (1) bis (8) für beliebige Elemente $a, b, c \in G$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ ([2])

$$\begin{array}{lll}
(1) & a^{\varepsilon} = a,\ e^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha} = \alpha^{e} = e, & \alpha^{e} = \alpha,\ \varepsilon^{a} = e^{a} = a^{e} = \varepsilon, \\
(2) & c^{a^b} = c, & \gamma^{\alpha^{\beta}} = \gamma, \\
(3) & \gamma^{a^b} = e, & c^{\alpha^{\beta}} = \varepsilon, \\
(4) & b^{\alpha} c^{\alpha^b} = (bc)^{\alpha}(b^c)^{\alpha}, & \gamma^{\alpha^{\beta}} \beta^{\alpha} = (\beta^{\gamma})^{\alpha}(\gamma\beta)^{\alpha}, \\
(5) & \beta^{\alpha} c^{\alpha\beta} = (c^{\beta})^{\alpha}(\beta^c)^{\alpha}, & \gamma^{b\alpha} b^{\alpha} = (b^{\gamma})^{\alpha}(\gamma^b)^{\alpha}, \\
(6) & \beta^{\alpha} \gamma^{\alpha\beta} = (\gamma^{\beta})^{\alpha}(\beta\gamma)^{\alpha}, & c^{b\alpha} b^{\alpha} = (cb)^{\alpha}(c^b)^{\alpha}, \\
(7) & (b^c \gamma)^{\alpha} = (b^c)^{\alpha}\gamma^{\alpha}, & (c\beta^{\gamma})^{a} = c^{a}(\beta^{\gamma})^{a}, \\
(8) & \gamma^{\alpha^{c\beta}\beta^c} = \gamma^{\alpha\beta}, & c^{b^{\gamma} a^{\gamma^b}} = c^{ba}.
\end{array}$$

Durch weitere Spezialisierung der Relationen (1) bis (8) erhält man ferner folgende nützliche Relationen:

$$(9)\qquad \gamma^{\alpha^b} = \gamma^\alpha, \qquad c^{a^\beta} = c^a,$$

$$(10)\qquad c^{a^b\beta} = c^\beta, \qquad \gamma^{b\alpha^\beta} = \gamma^b,$$

$$(11)\qquad \gamma^{\alpha^b\beta} = \gamma^\beta, \qquad c^{b\alpha^\beta} = c^b.$$

Schließlich ist das zu (a, α) inverse Element von $G \circ \Gamma$

$$(12)\qquad (a, \alpha)^{-1} = (\alpha^{-\alpha^{-1}}, \alpha^{-1})\,(a^{-1}, a^{-\alpha^{-1}});$$

hierin bedeutet $x^{-\nu} = (x^\nu)^{-1}$.

Rie Relationen (1) bis (11) sind zueinander „dual" in dem Sinne, daß die linke und die rechte Formelreihe auseinander hervorgehen, indem man lateinische und griechische Buchstaben miteinander vertauscht und die Reihenfolge der Faktoren umkehrt. Diese Dualität ist eine notwendige Folge der formalen Symmetrie des Multiplikationsgesetzes (M) von $G \circ \Gamma$ und überträgt sich auch auf die im folgenden abzuleitenden Formeln. Wir werden hiervon des öfteren Gebrauch machen, indem wir den Beweis einer Formel nur für eine Formelreihe führen und ihre Gültigkeit auch für die andere Formelreihe als gewährleistet ansehen.

Sind H bzw. H Teilmengen von G bzw. Γ, so bezeichne (H, H) stets die Menge derjenigen Elemente (a, α) von $G \circ \Gamma$, für die $a \in H$, $\alpha \in \mathsf{H}$ gilt. Dann ergeben die Relationen (M) und (1) $(a, \varepsilon)\,(e, \alpha) = (a, \alpha)$, und daher kann man die Gruppe $G \circ \Gamma$ auch als Produkt der Teilmengen (G, ε) und (e, Γ) in der Form

$$(13)\qquad G \circ \Gamma = (G, \varepsilon)\,(e, \Gamma)$$

schreiben. Ferner ergeben die Relationen (M) und (1)

$$(a, \varepsilon)\,(b, \varepsilon) = (ab, a^b), \quad (e, \alpha)\,(e, \beta) = (\beta^\alpha, \alpha\beta),$$

und dies zeigt, daß die Mengen (G, ε) und (e, Γ) in (13) im allgemeinen keine Untergruppen von $G \circ \Gamma$ sind.

Wir setzen nun zunächst voraus, daß die Gruppe $G \circ \Gamma$ nicht ausgeartet ist.

3. Die Untergruppen $G_0, G_1 < G$, $\Gamma_0, \Gamma_1 < \Gamma$ [1]).

Es bezeichne stets

G_1 die Menge aller Elemente $a_1 \in G$, für die

$$c^{a_1} = \varepsilon \text{ und zugleich } \gamma^{a_1} = \gamma$$

für alle $c \in G$ und alle $\gamma \in \Gamma$ gilt,

Γ_1 die Menge aller Elemente $\alpha_1 \in \Gamma$, für die

$$c^{\alpha_1} = c \text{ und zugleich } \gamma^{\alpha_1} = e$$

für alle $c \in G$ und alle $\gamma \in \Gamma$ gilt.

Wir halten uns streng an folgende Bezeichnungsweise: Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes verabredet wird, durchlaufen die Elemente ohne Index grundsätzlich die

[1]) $A < B$ bedeute stets, daß A eine echte oder auch unechte Teilmenge von B ist. Wir machen also keinen Unterschied zwischen $<$ und $\leqq$.

ganze Gruppe G bzw. Γ. Soll ein Element nur eine Teilmenge von G bzw. von Γ durchlaufen, so trägt es denselben Index, der auch die Teilmenge kennzeichnet, z. B. $a_1 \in G_1$, $\beta_0 \in \Gamma_0$.

Die Mengen G_1 bzw. Γ_1 bestehen nicht nur aus den Einselementen e bzw. ε allein, denn nach den Relationen (2) und (3) sind alle Elemente der Form a^b in Γ_1, α^β in G_1 enthalten und nach Voraussetzung ist die Gruppe $G \circ \Gamma$ nicht ausgeartet. Ist daher

G_0 die von allen Elementen α^β erzeugte Untergruppe von G,

Γ_0 die von allen Elementen a^b erzeugte Untergruppe von Γ,

(d. h. z. B.: die Elemente von G_0 sind Produkte von Elementen der Form α^β und von Inversen solcher Elemente), so gilt

$$e \neq G_0 < G_1, \quad \varepsilon \neq \Gamma_0 < \Gamma_1. \tag{14}$$

Auf die genaue Beziehung zwischen G_0 und G_1 bzw. zwischen Γ_0 und Γ_1 kommt es uns aber nicht an[2]).

Setzen wir nun in der Relation (5. 1) $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, so erhalten wir

$$\beta_1^{\alpha_1} c^{\alpha_1 \beta_1} = (c^{\beta_1})^{\alpha_1} (\beta_1^c)^{\alpha_1}.$$

Nach der Definition von α_1 und β_1 ist aber $\beta_1^{\alpha_1} = e$ und wegen $\beta_1^c \in \Gamma$ auch $(\beta_1^c)^{\alpha_1} = e$; schließlich ist wegen $c^{\beta_1} = c$ auch $(c^{\beta_1})^{\alpha_1} = c^{\alpha_1} = c$, also erhalten wir

$$c^{\alpha_1 \beta_1} = c \tag{15}$$

für alle $c \in G$ und alle $\alpha_1, \beta_1 \in \Gamma_1$. — Genau so erhalten wir aus der Relation (6. 1)

$$\gamma^{\alpha_1 \beta_1} = e \tag{16}$$

für alle $\gamma \in \Gamma$ und $\alpha_1, \beta_1 \in \Gamma_1$.

Setzen wir in der Relation (6. 1) $\beta = \beta_1$, $\alpha = \beta_1^{-1}$, so ergibt sich

$$\beta_1^{\beta_1^{-1}} = (\beta_1 \gamma)^{\beta_1^{-1}}$$

für alle $\gamma \in \Gamma$, also für $\gamma = \beta_1^{-1}$ insbesondere $\beta_1^{\beta_1^{-1}} = e$. Da mit γ auch $\beta_1 \gamma = \alpha$ die ganze Gruppe Γ durchläuft, so gilt auch

$$\alpha^{\beta_1^{-1}} = e \tag{17}$$

für alle $\alpha \in \Gamma$. Entsprechend erhalten wir aus der Relation (5. 1) für $\beta = \beta_1$, $\alpha = \beta_1^{-1}$

$$c^{\beta_1^{-1}} = c \tag{18}$$

für alle $c \in G$. Insgesamt besagen die soeben abgeleiteten Relationen (15) bis (18) aber, daß die Menge Γ_1 sogar eine Untergruppe der Gruppe Γ ist. Aus

$$(e, \alpha_1)(e, \beta_1) = (e, \alpha_1 \beta_1)$$

folgt, daß

$$\Gamma_1 \cong (e, \Gamma_1) < G \circ \Gamma.$$

Nach dem Dualitätsprinzip ist daher auch die Menge G_1 eine Untergruppe von $G \circ \Gamma$:

$$G_1 \cong (G_1, \varepsilon) < G \circ \Gamma.$$

Schließlich erhalten wir durch Anwendung des Multiplikationsgesetzes (M):

$$(a_1, \alpha_1)(b_1, \beta_1) = (a_1 b_1, \alpha_1 \beta_1),$$

---

[2]) Es dürfte auch kaum möglich sein, die genaue Beziehung etwa zwischen G_0 und G_1 direkt aus den Strukturrelationen (1) bis (11) abzuleiten.

und das besagt, daß das Gruppenpaar (G_1, Γ_1) das direkte Produkt der Untergruppen G_1 und Γ_1 ist:

$$(19) \qquad (G_1, \Gamma_1) \cong G_1 \times \Gamma_1 < G \circ \Gamma.$$

Offenbar gelten die Relationen (15) bis (18) auch für die Untergruppen $G_0 < G$ und $\Gamma_0 < \Gamma$ und analog zu (19) erhalten wir wegen (14)

$$(20) \qquad (G_0, \Gamma_0) \cong G_0 \times \Gamma_0 < G \circ \Gamma.$$

Während wir über die Beziehung zwischen $G_0 \times \Gamma_0$ und $G_1 \times \Gamma_1$ nichts aussagen können, ist aber unter unserer Voraussetzung, daß $G \circ \Gamma$ nicht ausgeartet ist, $G_1 \times \Gamma_1$ eine *echte* Untergruppe von $G \circ \Gamma$.

Ferner leiten wir noch folgende Relationen her: Die Beziehung (9. 1) für $\alpha = \alpha_1$ ergibt $\gamma^{\alpha_1^b} = \gamma^{\alpha_1} = e$ für alle $b \in G$, $\gamma \in \Gamma$. Ebenso erhalten wir für $\alpha = \alpha_1$ aus der Relation (4. 1) zunächst $bc^{\alpha_1^b} = bc$, und nach Kürzung des Faktors b dann $c^{\alpha_1^b} = c$ für alle Elemente $b, c \in G$. Es gilt daher (mit Benutzung des Dualitätsprinzips)

$$(21) \qquad a_1^\beta \in G_1, \quad \alpha_1^b \in \Gamma_1$$

für alle $a_1 \in G_1$, $\alpha_1 \in \Gamma_1$, $b \in G$, $\beta \in \Gamma$.

Da für jedes Element $\alpha \in \Gamma$ auch die Elemente α^b für jedes $b \in G$ wieder in Γ liegen, können wir die Gruppe G auch als einen Operatorenbereich [3]) für die Gruppe Γ ansehen: das Element $c \in G$ führt das Element $\alpha \in \Gamma$ in das Element $\alpha^c \in \Gamma$ über. Dual hierzu ist auch die Gruppe Γ als Operatorenbereich für die Gruppe G anzusehen. Man bezeichnet üblicherweise eine Untergruppe H von Γ als *zulässig* (in bezug auf G), wenn sie bei den Abbildungen $\alpha \to \alpha^a (\alpha \in \mathsf{H}, a \in G)$ in sich übergeführt wird, d. h. wenn stets $\mathsf{H}^a < \mathsf{H}$ für alle $a \in G$ gilt. In diesem Sinne können wir (21) auch folgendermaßen ausdrücken:

(22) *Die echten Untergruppen G_1 bzw. Γ_1 sind zulässige Untergruppen von G bzw. Γ.*

Schließlich erwähnen wir noch die unmittelbar aus (6. 1) folgende Relation:

$$(23) \qquad \gamma^{\alpha_1 \beta} = \gamma^\beta, \quad c^{ba_1} = c^b$$

für alle $b, c \in G$, $\beta, \gamma \in \Gamma$, $a_1 \in G_1$, $\alpha_1 \in \Gamma_1$.

Es sei Γ_2 die Menge aller Elemente $\varrho \in \Gamma$, die nur der einen Bedingung $\gamma^\varrho = e$ für alle $\gamma \in \Gamma$ genügen. Entsprechend sei G_2 die Menge aller Elemente $r \in G$ die nur der einen Bedingung $a^r = \varepsilon$ für alle $a \in G$ genügen.

Aus der Relation (9. 1) folgt sofort $\gamma^{\varrho^b} = \gamma^\varrho = e$ für jedes $\varrho \in \Gamma_2$, und jedes $\gamma \in \Gamma$, $b \in G$. Zusammen mit (16) und (17) erhält man hieraus:

(24) *Γ_2 bzw. G_2 ist eine zulässige Untergruppe von Γ bzw. G.*

Nach (3. 1) ist jedenfalls $\Gamma_0 < \Gamma_2$. Es ist sogar $\Gamma_1 < \Gamma_2$; also besteht Γ_2 nicht nur aus dem Einselement allein.

Obwohl wir von der Untergruppe Γ_2 weiterhin keinen Gebrauch machen, hat sie doch eine interessante Eigenschaft, wenn man sie als Operatorenbereich für die Gruppe G betrachtet. Für $\varrho, \sigma \in \Gamma_2$ liefert nämlich die Relation (5. 1)

$$(25) \qquad c^{\varrho\sigma} = (c^\sigma)^\varrho.$$

---

[3]) Wir sprechen auch hier von Operatoren, obwohl man in der Gruppentheorie gewöhnlich unter einem Operator einen „distributiven" Operator versteht, für den statt (4. 2) die Relation $(\gamma\beta)^\alpha = \gamma^\alpha \beta^\alpha$ gilt.

Wir können daher die Abbildung $\pi_\varrho : c \to c^\varrho$ ansehen als eine Permutation π_ϱ der Elemente c von G und nach (25) gilt

$$\pi_{\varrho\sigma} = \pi_\varrho \pi_\sigma .$$

Läßt man ϱ die Gruppe Γ_2 durchlaufen, so bilden also die Permutationen π_ϱ eine zu Γ_2 homomorphe Permutationsgruppe Π. Der Kern dieser Homomorphie besteht aus allen denjenigen Elementen $\varrho \in \Gamma_2$, die c wieder in c abbilden. Das sind aber gerade die Elemente aus Γ_1; somit ist

$$\Pi \cong \Gamma_2 / \Gamma_1 .$$

Daraus folgt noch, daß Γ_1 Normalteiler in Γ_2 ist. Dual hierzu ist natürlich G_1 Normalteiler in G_2.

Läßt man hingegen die ganze Gruppe Γ als Operatorenbereich für die Gruppe G zu, so wird die Abbildung $c \to c^\alpha$ nach (5. 1) sehr kompliziert. Nimmt man aber nur die Untergruppe G_1, so lautet die Relation (5. 1)

$$\beta^\alpha c_1^{\alpha\beta} = (c_1^\beta)^\alpha \beta^\alpha ;$$

und wenn wir schließlich noch den Fall betrachten, daß G_1 eine abelsche Gruppe ist, so erhalten wir einfach die Beziehung

$$c_1^{\alpha\beta} = (c_1^\beta)^\alpha ,$$

gültig für alle Elemente $\alpha, \beta \in \Gamma$. Die Abbildung $c_1 \to c_1^\alpha$ ist also, weil G_1 zulässig ist, wieder eine Permutation $\bar{\pi}_\alpha$ der Elemente von G_1.

Die Relation (4. 1) ergibt für $b = b_1$, $c = c_1$

$$b_1^\alpha c_1^\alpha = (b_1 c_1)^\alpha$$

und besagt, daß die Permutation $\bar{\pi}_\alpha$ sogar ein Automorphismus von G_1 ist. Wir haben also das Ergebnis:

Sind G_1 bzw. Γ_1 abelsch, so induzieren die Permutationen $c_1 \to c_1^\alpha$ bzw. $\alpha_1 \to \alpha_1^\varrho$ lauter Automorphismen von G_1 bzw. Γ_1.

In dem Fall, daß G_1 bzw. Γ_1 abelsch sind, haben wir somit ein Analogon zu einem Satz von Szép, wonach auch in dem zweifach ausgearteten Produkt $G \,2\, \Gamma$ die obigen Permutationen lauter Automorphismen induzieren (vgl. etwa [2], Satz 7).

4. Die Untergruppen $H < G$ und $\mathbf{H} < \Gamma$.

Wir richten unser Augenmerk jetzt auf die noch nicht benutzte Relation (7. 1), die wir in unserer Bezeichnungsweise verallgemeinern können zu

$$(\beta_0 \gamma)^\alpha = \beta_0^\alpha \gamma^\alpha , \quad (c b_0)^\alpha = c^\alpha b_0^\alpha .$$

Setzt man hingegen in der Relation (6. 1) $\beta = \beta_1$, so erhält man nur

$$(\beta_1 \gamma)^\alpha = \beta_1^\alpha \gamma^{\alpha\beta_1} . \tag{26}$$

Diese Tatsache gibt Anlaß zur Definition einer Zwischengruppe $\Gamma_0 < \Phi < \Gamma_1$. Man erkennt nämlich leicht, daß die Elemente $\varrho \in \Gamma_1$, die der Beziehung

$$(\varrho\gamma)^\alpha = \varrho^\alpha \gamma^\alpha \quad \text{für alle } \alpha, \gamma \in \Gamma \tag{27}$$

genügen, eine Gruppe Φ bilden. In der Tat gilt für $\varrho, \sigma \in \Phi$ wegen $(\varrho\sigma)^\alpha = \varrho^\alpha \sigma^\alpha$ auch $(\varrho\sigma\gamma)^\alpha = \varrho^\alpha (\sigma\gamma)^\alpha = \varrho^\alpha \sigma^\alpha \gamma^\alpha = (\varrho\sigma)^\alpha \gamma^\alpha$. Ferner erhalten wir für $\varrho \in \Phi$ nach der Relation

(26) aus $\gamma^\alpha = (\varrho\varrho^{-1}\gamma)^\alpha = \varrho^\alpha(\varrho^{-1}\gamma)^\alpha = \varrho^\alpha(\varrho^{-1})^\alpha\gamma^{\alpha\varrho^{-1}} = (\varrho\varrho^{-1})^\alpha\gamma^{\alpha\varrho^{-1}} = \gamma^{\alpha\varrho^{-1}}$ zunächst $\gamma^{\alpha\varrho^{-1}} = \gamma^\alpha$ für alle $\varrho \in \Phi$, γ, $\alpha \in \Gamma$, und daher gilt auch (wieder nach (26))

$$(\varrho^{-1}\gamma)^\alpha = (\varrho^{-1})^\alpha\gamma^{\alpha\varrho^{-1}} = (\varrho^{-1})^\alpha\gamma^\alpha.$$

Wir definieren daher als

Φ die Menge aller $\varrho \in \Gamma_1$, die noch die Relation $(\varrho\gamma)^\alpha = \varrho^\alpha\gamma^\alpha$ für alle $\alpha, \gamma \in \Gamma$ erfüllen,

F die Menge aller $r \in G$, die noch die Relation $(cr)^a = c^a r^a$ für alle $a, c \in G$ erfüllen.

Man beachte, daß $G_0 < F$, $\Gamma_0 < \Phi$. Daher bestehen, weil $G \circ \Gamma$ nicht ausgeartet sein sollte, die Gruppen F und Φ nicht nur aus dem Einselement allein.

Es wird zweckmäßig sein, diese Definition von F und Φ noch durch eine zu ihr äquivalente zu ersetzen. Für $\beta = \varrho \in \Phi$ erhalten wir nämlich aus (6. 1) $\varrho^\alpha\gamma^{\alpha\varrho} = (\varrho\gamma)^\alpha = \varrho^\alpha\gamma^\alpha$, also $\gamma^{\alpha\varrho} = \gamma^\alpha$. Zusammen mit (23. 1) gilt also

$$\gamma^{\varrho\alpha} = \gamma^{\alpha\varrho} = \gamma^\alpha \tag{28}$$

für alle $\varrho \in \Phi$, α, $\gamma \in \Gamma$. Und gilt für ein $\lambda \in \Gamma_1$ umgekehrt $\gamma^\alpha = \gamma^{\alpha\lambda}$, so erhalten wir aus (6. 1) $\lambda^\alpha\gamma^\alpha = (\lambda\gamma)^\alpha$, d. h. es ist $\lambda \in \Phi$. Wir können somit auch sagen

Φ ist die Menge aller $\varrho \in \Gamma_1$, die die Relationen $\gamma^{\varrho\alpha} = \gamma^{\alpha\varrho} = \gamma^\alpha$ für alle $\alpha, \beta \in \Gamma$ erfüllen,

F ist die Menge aller $r \in G$, die die Relationen $c^{ra} = c^{ar} = c^a$ für alle $a, c \in G$ erfüllen.

Im Gegensatz zu (22) können wir aber aus den Strukturrelationen (1) bis (11) nicht herauslesen, ob Φ (bzw. F) eine zulässige Untergruppe ist.

Wir verkleinern nun die Untergruppe Φ noch einmal, indem wir alle diejenigen Elemente $\lambda \in \Phi$ betrachten, die auch der Relation

$$c^{\alpha\lambda} = c^\alpha \tag{29}$$

für alle $c \in G$, $\alpha \in \Gamma$ genügen.

Gilt $c^{\alpha\lambda} = c^\alpha$, $c^{\alpha\mu} = c^\alpha$ für alle Elemente $c \in G$, $\alpha \in \Gamma$, so berechnet man zunächst aus (5. 1)

$$\mu^{\alpha\lambda}c^{\alpha\lambda\mu} = (c^\mu)^{\alpha\lambda}(\mu^c)^{\alpha\lambda},$$

gültig für alle $c \in G$, $\alpha \in \Gamma$. Wegen λ, $\mu \in \Phi$ reduziert sich diese Gleichung nach Voraussetzung und der zweiten Definition von Φ auf die Gleichung

$$\mu^\alpha c^{\alpha\lambda\mu} = (c^\mu)^\alpha(\mu^c)^\alpha$$

für alle $c \in G$, $\alpha \in \Gamma$. Die rechte Seite dieser Beziehung ergibt aber, wenn man sie wieder nach (5. 1) umformt,

$$(c^\mu)^\alpha(\mu^c)^\alpha = \mu^\alpha c^{\alpha\mu} = \mu^\alpha c^\alpha.$$

Ein Vergleich beider Relationen liefert $c^{\alpha\lambda\mu} = c^\alpha$, gültig für alle $c \in G$, $\alpha \in \Gamma$.

Genau so erhalten wir

$$\begin{aligned}(\mu^{-1})^\alpha c^\alpha &= (\mu^{-1})^{\alpha\mu}c^{\alpha\mu\mu^{-1}} = (c^{\mu^{-1}})^{\alpha\mu}((\mu^{-1})^c)^{\alpha\mu} \\ &= (c^{\mu^{-1}})^\alpha((\mu^{-1})^c)^\alpha = (\mu^{-1})^\alpha c^{\alpha\mu^{-1}},\end{aligned}$$

also gilt auch $c^{\alpha\mu^{-1}} = c^\alpha$ für alle $c \in G$, $\alpha \in \Gamma$. Die abgeleiteten Relationen zusammen besagen aber, daß die Elemente $\lambda \in \Phi$, die der Relation (29) genügen, selbst eine Untergruppe von Φ bilden. Wir definieren daher folgende Gruppen:

H ist die Menge aller Elemente $\sigma \in \Phi$, die zusätzlich noch die Relation $c^{\sigma\alpha} = c^{\alpha}$ für alle $c \in G$, $\alpha \in \Gamma$ erfüllen,

H ist die Menge aller Elemente $s \in F$, die zusätzlich noch die Relation $\gamma^{sa} = \gamma^{a}$ für alle $a \in G$, $\gamma \in \Gamma$ erfüllen.

Diese Untergruppen sind nun von entscheidender Bedeutung für unser Problem. Von den bisherigen Untergruppen, z. B. G_1, Γ_1, wußten wir, daß sie nicht nur aus dem Einselement allein bestehen. Dies können wir jetzt nicht mehr allgemein entscheiden[4]). Wir können aber trotzdem große Klassen von Gruppen angeben, in denen H und H vom Einselement verschieden sind, z. B. alle Gruppen G, Γ mit vom Einselement verschiedenem Zentrum (hierunter fallen insbesondere alle abelschen Gruppen G, Γ).

Die wesentliche Eigenschaft der Gruppe H ist für uns aber darin zu sehen, daß sie einen Normalteiler in Γ bildet. (Das Entsprechende gilt dann dual von H. — Dies ist auch zu erwarten, hängen doch jetzt die Funktionen c^{α}, γ^{α} nur von den Restklassen von Γ nach H ab.)

Wir führen den Beweis in mehreren Schritten: Es sei $\lambda \in \mathsf{H}$, dann berechnet man nach den Relationen (5. 1), (28) und (29)

$$\begin{aligned}(\alpha^{-1})^{\alpha} c^{\alpha\lambda\alpha^{-1}} &= (c^{\alpha^{-1}})^{\alpha\lambda} ((\alpha^{-1})^{e})^{\alpha\lambda} = (c^{\alpha^{-1}})^{\alpha} ((\alpha^{-1})^{e})^{\alpha} \\ &= (\alpha^{-1})\, c,\end{aligned}$$

also ist $c^{\alpha\lambda\alpha^{-1}} = c$ für alle $\alpha \in \Gamma$, $c \in G$ und $\lambda \in \mathsf{H}$. Ebenso ergeben die Relationen (6. 1), (28) und (29)

$$\begin{aligned}(\alpha^{-1})^{\alpha} \gamma^{\alpha\lambda\alpha^{-1}} &= (\gamma^{\alpha^{-1}})^{\alpha\lambda} (\alpha^{-1}\gamma)^{\alpha\lambda} = (\gamma^{\alpha^{-1}})^{\alpha} (\alpha^{-1}\gamma)^{\alpha} \\ &= (\alpha^{-1})^{\alpha} \varepsilon,\end{aligned}$$

und somit gilt $\gamma^{\alpha\lambda\alpha^{-1}} = \varepsilon$ für alle $\alpha, \gamma \in \Gamma$ und $\lambda \in \mathsf{H}$. Das bedeutet, daß jedenfalls $\alpha\lambda\alpha^{-1} \in \Gamma_1$ ist.

Benutzen wir diese letzte Relation, so ergibt die Beziehung (6. 1), wenn wir darin β durch $\alpha\lambda\alpha^{-1}$ und α durch β ersetzen

$$\begin{aligned}\varepsilon(\alpha\lambda\alpha^{-1}\gamma)^{\beta} &= (\alpha\lambda\alpha^{-1})^{\beta} \gamma^{\beta\alpha\lambda\alpha^{-1}} = (\alpha\lambda\alpha^{-1})^{\beta} \gamma^{(\beta\alpha)\lambda(\beta\alpha)^{-1}\beta} \\ &= (\alpha\lambda\alpha^{-1})^{\beta} \gamma^{\beta}\end{aligned}$$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$, und das besagt, daß sogar $\alpha\lambda\alpha^{-1} \in \Phi$ ist. Schließlich ergibt die Relation (5. 1), wenn man $c^{\beta\alpha\lambda\alpha^{-1}}$ durch $c^{(\beta\alpha)\lambda(\beta\alpha)^{-1}\beta}$ ersetzt,

$$\beta^{(\beta\alpha)\lambda(\beta\alpha)^{-1}} c^{(\beta\alpha)\lambda(\beta\alpha)^{-1}\beta} = (c^{\beta})^{(\beta\alpha)\lambda(\beta\alpha)^{-1}} (\beta^{c})^{(\beta\alpha)\lambda(\beta\alpha)^{-1}}$$

für alle $\alpha, \beta \in \Gamma$ und alle $c \in G$. Berücksichtigen wir, daß $(\beta\alpha)\,\lambda(\beta\alpha)^{-1} \in \Phi$ ist, so reduziert sich diese Beziehung auf $c^{\beta\alpha\lambda\alpha^{-1}} = c^{\beta}$, also liegt $\alpha\lambda\alpha^{-1}$ sogar in H und daher ist H Normalteiler in Γ.

Dual hierzu ist natürlich wieder H Normalteiler von G. Wir formulieren das Hauptergebnis dieses Paragraphen besonders:

(30) *Die Gruppen H bzw. H sind Normalteiler von G bzw. Γ.*

Aus der Relation (29) lesen wir für $\alpha = \varepsilon$ ab, daß H bzw. H jedenfalls Untergruppen von G_1 bzw. Γ_1 sind. Daraus folgt nach (19), daß das Gruppenpaar (H, H) das direkte Produkt aus H und H ist:

$$(H, \mathsf{H}) \cong H \times \mathsf{H}.$$

[4]) Es wird auch kaum möglich sein, allein aus den Strukturrelationen (1) bis (11) abzuleiten, wann z. B. $H \neq e$ ist.

5. $G \circ \Gamma$ und Schreiersche Erweiterung.

Wir beweisen zunächst das folgende

Lemma. *Sind die Untergruppen H und H zulässig, und sind G_0 bzw. Γ_0 Untergruppen von H bzw. H, so ist das Gruppenpaar $(H, \mathsf{H}) \cong H \times \mathsf{H}$ Normalteiler von $G \circ \Gamma$.*

Beweis. Unter unseren Voraussetzungen ist $(G_0, \Gamma_0) < (H, \mathsf{H}) < (G_1, \Gamma_1)$. — Es seien nun die Elemente $r \in H$, $\varrho \in \mathsf{H}$. Dann ist die Gültigkeit einer Beziehung

$$(a, \alpha)\,(r, \varrho) = (s, \sigma)\,(a, \alpha) \tag{31}$$

gleichbedeutend mit der Gültigkeit der beiden Relationen

$$ar^{\alpha}\varrho^{\alpha} = sa^{\sigma}\alpha^{\sigma}, \quad \alpha\varrho = s^{\alpha}\sigma^{\alpha}\alpha. \tag{32}$$

Da H Normalteiler in Γ ist, so ist in (32. 2) $\sigma^{\alpha} = (s^{\alpha})^{-1}\alpha\varrho\alpha^{-1} = \lambda \in \mathsf{H}$. Dann liefert aber die Relation (5. 2), wenn man darin γ durch σ, b durch a und a durch a^{-1} ersetzt, $\sigma a^{\alpha^{-1}} = (a^{\sigma})^{\alpha^{-1}}(\sigma^{\alpha})^{\alpha^{-1}}$ oder $\sigma = (a^{\sigma})^{\alpha^{-1}}\lambda^{\alpha^{-1}}(a^{\alpha^{-1}})^{-1}$. Nach Voraussetzung ist H zulässig und $\Gamma_0 < \mathsf{H}$. Daher ist auch $\sigma \in \mathsf{H}$. Hiermit reduziert sich aber (32. 1) auf die Beziehung $ar^{\alpha}\varrho^{\alpha} = sa$. Daraus folgt sofort nach Voraussetzung $s = ar^{\alpha}\varrho^{\alpha}a^{-1} \in H$.

Also ist in der Relation (31) auch das Element (s, σ) in (H, H) enthalten und damit das Lemma bewiesen.

Wegen (30) kann man setzen

$$G = \sum_{A \in G/H} g_A H, \qquad \Gamma = \sum_{\mathsf{A} \in \Gamma/\mathsf{H}} \mathsf{H}\gamma_{\mathsf{A}},$$

worin A die Elemente von G/H, A die Elemente von Γ/H durchläuft. — Ist $(r, \varrho) \in (H, \mathsf{H})$, so berechnet man leicht $(g_A, \varepsilon)\,(r, \varrho)\,(e, \gamma_{\mathsf{A}}) = (g_A r, \varrho\gamma_{\mathsf{A}})$. Daher läßt sich $G \circ \Gamma$ auch in der Form

$$G \circ \Gamma = \sum_{\substack{A \in G/H \\ \mathsf{A} \in \Gamma/\mathsf{H}}} (g_A, \varepsilon)\,(H, \mathsf{H})\,(e, \gamma_{\mathsf{A}})$$

schreiben. Die Multiplikation der Restklassen ergibt

$$\begin{aligned}
&(g_A, \varepsilon)\,(H, \mathsf{H})\,(e, \gamma_{\mathsf{A}}) \cdot (g_B, \varepsilon)\,(H, \mathsf{H})\,(e, \gamma_{\mathsf{B}}) \\
&\quad = (g_A, \varepsilon)\,(H, \mathsf{H})\,(g_B^{\gamma_{\mathsf{A}}}, \gamma_{\mathsf{A}}^{g_B})\,(H, \mathsf{H})\,(e, \gamma_{\mathsf{B}}) \\
&\quad = (g_A, \varepsilon)\,(H, \mathsf{H})\,(g_B^{\gamma_{\mathsf{A}}}, \varepsilon)\,(e, \gamma_{\mathsf{A}}^{g_B})\,(H, \mathsf{H})\,(e, \gamma_{\mathsf{B}}) \\
&\quad = \left(g_A g_B^{\gamma_{\mathsf{A}}}, g_A^{\gamma_{\mathsf{A}}^{g_B}}\right)(H, \mathsf{H})\left(\gamma_{\mathsf{B}}^{\gamma_{\mathsf{A}}^{g_B}}, \gamma_{\mathsf{A}}^{g_B}\gamma_{\mathsf{B}}\right) \\
&\quad = (g_A g_B^{\gamma_{\mathsf{A}}}, \varepsilon)\,(e, g_A^{g_B})\,(H, \mathsf{H})\,(\gamma_{\mathsf{B}}^{\gamma_{\mathsf{A}}}, \varepsilon)\,(e, \gamma_{\mathsf{A}}^{g_B}\gamma_{\mathsf{B}}) \\
&\quad = (g_A g_B^{\gamma_{\mathsf{A}}}, \varepsilon)\,(H, \mathsf{H})\,(e, \gamma_{\mathsf{A}}^{g_B}\gamma_{\mathsf{B}}).
\end{aligned}$$

Nun ist $(g_A g_B^{\gamma_{\mathsf{A}}}, \varepsilon)\,(e, \gamma_{\mathsf{A}}^{g_B}\gamma_{\mathsf{B}}) = (g_A g_B^{\gamma_{\mathsf{A}}}, \gamma_{\mathsf{A}}^{g_B}\gamma_{\mathsf{B}}) = (g_A, \gamma_{\mathsf{A}}) \mathbin{2} (g_B, \gamma_{\mathsf{B}})$, worin $(a, \alpha) \mathbin{2} (b, \beta)$ das Zappa-Szép-Produkt der beiden Elementepaare (a, α) und (b, β) bedeutet. Wir haben damit den folgenden Satz gewonnen:

Satz 1. *Sind die Gruppen H und H zulässig und sind G_0 bzw. Γ_0 Untergruppen von H bzw. H, so ist das nichtausgeartete Rédeische schiefe Produkt $G \circ \Gamma$ die Schreiersche Erweiterung von $H \times \mathsf{H}$ durch $G/H \mathbin{2} \Gamma/\mathsf{H}$:*

$$G \circ \Gamma / H \times \mathsf{H} \cong G/H \mathbin{2} \Gamma/\mathsf{H}.$$

Im Extremfall ist $H = G_1$, $\mathsf{H} = \Gamma_1$. Nach (22) sind G_1 und Γ_1 zulässig und enthalten G_0 bzw. Γ_0 als Untergruppen. Wir folgern also aus Satz 1 den Spezialfall:

Satz 2. *Sind G_1 und Γ_1 Normalteiler von G bzw. Γ, so ist das nichtausgeartete Rédeische schiefe Produkt $G \circ \Gamma$ die Schreiersche Erweiterung von $G_1 \times \Gamma_1$ durch $G/G_1 \,2\, \Gamma/\Gamma_1$, d. h. es ist dann $G_1 \times \Gamma_1$ Normalteiler von $G \circ \Gamma$ und*

$$G \circ \Gamma / G_1 \times \Gamma_1 \cong G/G_1 \,2\, \Gamma/\Gamma_1.$$

Wir werden sehen, daß vier der ausgearteten Rédeischen schiefen Produkte nur Spezialfälle dieses Satzes 2 sind.

Satz 2 hat offenbar immer dann Gültigkeit, wenn die Gruppen G_1 bzw. Γ_1 im Zentrum von G bzw. Γ liegen. Das ist insbesondere der Fall, wenn die Gruppen G und Γ, aus denen die Gruppe $G \circ \Gamma$ gebildet ist, abelsch sind. Bekanntlich ist eine abelsche Gruppe genau dann einfach, wenn sie zyklisch von Primzahlordnung ist. In diesem Fall ist aber G_1 entweder gleich der ganzen Gruppe G oder besteht nur aus dem Einselement allein. Sind also G und Γ abelsche Gruppen, so ist $G \circ \Gamma$ notwendig ausgeartet, wenn sie von Primzahlordnung sind. In einem nichtausgearteten Rédeischen schiefen Produkt können also bei abelschen Gruppen G und Γ beide nicht einfach sein, folglich sind G_1 bzw. Γ_1 echte Normalteiler von G bzw. Γ und Satz 2 liefert den

Satz 3. *Ein aus abelschen Gruppen G bzw. Γ gebildetes nichtausgeartetes Rédeisches schiefes Produkt ist stets die in Satz 2 angegebene Schreiersche Erweiterung von $G_1 \times \Gamma_1$ durch $G/G_1 \,2\, \Gamma/\Gamma_1$.*

Eine weitere triviale Folgerung aus Satz 2 ist

Satz 4. *Sind G und Γ Hamiltonsche Gruppen, so ist das aus G und Γ gebildete nichtausgeartete Rédeische schiefe Produkt $G \circ \Gamma$ die Schreiersche Erweiterung von $G_1 \times \Gamma_1$ durch $G/G_1 \,2\, \Gamma/\Gamma_1$.*

Wir wollen noch einen Fall behandeln, in dem sich die Gruppe $G \circ \Gamma$ als eine Schreiersche Erweiterung erweist. Wir wollen der Kürze halber sagen, daß das Element $\varrho \in \Gamma$ durch die Gruppe Γ annulliert wird, wenn $\varrho^\alpha = e$ gilt für alle $\alpha \in \Gamma$. Wird auch das Element $\sigma \in \Gamma$ durch die Gruppe Γ annulliert, so erhalten wir aus der Relation (6. 1), wenn wir darin β durch ϱ, γ durch σ ersetzen und $\varrho^\alpha = \sigma^{\alpha\varrho} = \sigma^\varrho = e$ berücksichtigen, $(\varrho\sigma)^\alpha = e$ für alle $\alpha \in \Gamma$. Desgleichen ergibt dieselbe Relation (6. 1), wenn wir β durch ϱ^{-1}, γ durch ϱ ersetzen, wegen $\varrho^{\varrho^{-1}} = \varrho^{\alpha\varrho^{-1}} = e$ sofort $(\varrho^{-1})^\alpha = e$. Beide Beziehungen zusammen besagen aber, daß die Elemente aus Γ, die durch Γ annulliert werden, selbst eine Gruppe bilden.

Dual hierzu bilden auch alle Elemente $r \in G$, die durch die Gruppe G annulliert werden, eine Untergruppe von G.

Im Extremfall können alle Elemente aus G durch G bzw. alle Elemente aus Γ durch Γ annulliert werden. Dann liegt der Fall des Zappa-Szép-Produktes vor.

Wird aber nur die Untergruppe Φ von Γ durch Γ bzw. die Untergruppe F von G durch G annulliert (zur Definition von Φ bzw. F vgl. § 3), so erhalten wir aus den Relationen (5)

$$c^{\alpha\varrho} = c^\alpha, \quad \gamma^{\gamma\alpha} = \gamma^\alpha,$$

wenn wir voraussetzen, daß die Gruppen F und Φ zulässig sind.

Die Relation (6. 1) ergibt $\beta^\alpha \varrho^{\alpha\beta} = \beta^\alpha = (\varrho^\beta)^\alpha (\beta\varrho)^\alpha = (\beta\varrho)^\alpha$, d. h. es gilt

$$\beta^\alpha = (\beta\varrho)^\alpha \tag{33}$$

für alle $\alpha, \beta \in \Gamma$ und alle ϱ, die durch die Gruppe Γ annulliert werden. Wird nun Φ durch Γ und F durch G annulliert, so liefert uns die Relation (6. 1) für beliebige Elemente $\alpha, \beta \in \Gamma$

$$((\beta^{-1})^{\beta})^{\alpha}(\beta\varrho\beta^{-1})^{\alpha} = (\beta\varrho)^{\alpha}(\beta^{-1})^{\alpha\beta}$$

und mit (33)

$$(\beta\varrho)^{\alpha}(\beta^{-1})^{\alpha\beta} = \beta^{\alpha}(\beta^{-1})^{\alpha\beta} = ((\beta^{-1})^{\beta})^{\alpha}.$$

Ein Vergleich beider Relationen ergibt

$$(\beta\varrho\beta^{-1})^{\alpha} = \varepsilon$$

für alle Elemente $\alpha, \beta \in \Gamma$, $\varrho \in \Phi$, d. h. es ist Φ Normalteiler von Γ. — Dual hierzu ist F Normalteiler von G. Damit erhalten wir den folgenden

Satz 5. *Sind die Untergruppen F und Φ zulässig und wird F durch G, Φ durch Γ annulliert, so ist das nichtausgeartete Rédeische schiefe Produkt $G \circ \Gamma$ die Schreiersche Erweiterung von $F \times \Phi$ durch die Gruppe $G/F \,2\, \Gamma/\Phi$.*

Der Satz 5 ist nur ein Spezialfall des Satzes 1. Ist $\lambda \in \mathsf{H}$, so lautet die Relation (5. 1) $\lambda^{\alpha}c^{\alpha} = c^{\alpha}(\lambda^{c})^{\alpha}$; wir können also nicht umgekehrt schließen, daß dann auch H durch Γ annulliert wird.

6. Die ein- und zweifach ausgearteten Fälle.

Wir wollen zum Schluß noch sehen, wie sich die ein- und zweifach ausgearteten Fälle unseren allgemeinen Sätzen unterordnen. Wir haben nur zu prüfen, ob G_1 bzw. Γ_1 oder ihre zulässigen Untergruppen Normalteiler in G bzw. in Γ sind. Zur besseren Übersicht geben wir die Strukturrelationen der betreffenden Gruppen explizit an. Man erhält sie entweder durch entsprechende Spezialisierung der Relationen (1) bis (8) des § 2 oder durch direkte Rechnung. Die Beziehungen (1) des § 2 gelten stets, wir schreiben sie daher erst gar nicht auf, da sie für unsere Zwecke sowieso ohne Belang sind.

Bestehen G_0 und Γ_0 beide aus dem Einselement allein, so sind G und Γ nach S. 3 Untergruppen von $G \circ \Gamma$. Dies trifft zu für das Zappa-Szép-Produkt

$$G \,2\, \Gamma : (a, \alpha)\,(b, \beta) = (ab^{\alpha}, \alpha^{b}\beta).$$

Die Gruppe ist bestimmt durch die folgenden Strukturrelationen:

$$a^{\alpha\beta} = (a^{\beta})^{\alpha}, \qquad \alpha^{ab} = (\alpha^{a})^{b},$$
$$(ab)^{\alpha} = a^{\alpha}b^{\alpha^{a}}, \quad (\alpha\beta)^{a} = \alpha^{a^{\beta}}\beta^{a}.$$

Formal ist in $G \,2\, \Gamma$ also $G_0 = e$, $\Gamma_0 = \varepsilon$, aber es ist $G_1 \neq G$, $\Gamma_1 \neq \Gamma$ (andernfalls wäre $G \,2\, \Gamma$ das direkte Produkt $G \times \Gamma$ und vierfach ausgeartet).

Ist $e \neq G_1$, $\varepsilon \neq \Gamma_1$, so folgt genau wie in § 3, daß die Abbildungen $\pi_{\alpha} : a \to a^{\alpha}$ eine zu Γ homomorphe Permutationsgruppe Π bilden, deren Kern gerade die Untergruppe Γ_1 ist. Also ist Γ_1 Normalteiler von Γ. Wegen der Symmetrie des Multiplikationsgesetzes ist das Dualitätsprinzip anwendbar, also ist auch G_1 Normalteiler von G. Es ist also sogar Satz 2 anwendbar:

Im Falle $e \neq G_1$, $\varepsilon \neq \Gamma_1$ ist $G \,2\, \Gamma$ die Schreiersche Erweiterung von $G_1 \times \Gamma_1$ durch $G/G_1 \,2\, \Gamma/\Gamma_1$.

(Für $G_1 = e$, $\Gamma_1 = \varepsilon$ erhalten wir die Trivialität $G \,2\, \Gamma/(e, \varepsilon) = G \,2\, \Gamma$.)

Beim zweifach ausgearteten schiefen Produkt

$$G \,1\, \Gamma : (a, \alpha)\,(b, \beta) = (ab, a^{b}\alpha^{b}\beta)$$

wird formal $G_0 = e$, $\Gamma_1 = \Gamma$; über G_1 und Γ_0 wird nichts ausgesagt. Die Strukturrelationen lauten

$$(\alpha\beta)^c = \alpha^c \beta^c,$$
$$\alpha^{bc} b^c = b^c (\alpha^b)^c,$$
$$a^{bc} b^c = (ab)^c (a^b)^c.$$

Ist $G_1 = e$, so erhält man formal die Schreiersche Erweiterung

$$(G\,1\,\Gamma)/\Gamma \cong G\,2\,\varepsilon \cong G.$$

Ist G_1 echter Normalteiler von G, so ist $(G_1, \Gamma) \cong G_1 \times \Gamma$ wegen $(a_1, \alpha)\,(b_1, \beta) = (a_1 b_1, \alpha\beta)$, und der Satz 2 liefert

$$G\,1\,\Gamma/G_1 \times \Gamma \cong G/G_1.$$

Für das Produkt

$$G\,3\,\Gamma : (a, \alpha)\,(b, \beta) = (ab\beta^\alpha, a^b \alpha\beta)$$

lauten die Strukturrelationen

$$a\beta^\gamma = \beta^\gamma a, \qquad \alpha b^c = b^c \alpha,$$
$$\alpha^{b^c} = e, \qquad a^{\beta^\gamma} = \varepsilon,$$
$$(a^b)^\gamma = e, \qquad (\alpha^\beta)^c = \varepsilon,$$
$$(\beta\gamma)^\alpha \gamma^\beta = \gamma^{\alpha\beta} \beta^\alpha, \qquad (ab)^c a^b = a^{bc} b^c.$$

Formal ist $G_0 \neq e$, $\Gamma_0 \neq \varepsilon$; über G_1, Γ_1 wird nichts weiter ausgesagt. Aus der ersten Strukturformel folgt aber sofort, daß G_0 und Γ_0 im Zentrum von G bzw. Γ liegen, daher ist G_0 Normalteiler von G, Γ_0 Normalteiler von Γ. Und da $b^\alpha = b$ für alle $\alpha \in \Gamma$ und alle $b \in G$, also erst recht für alle $b_0 \in G_0$ gilt, sind G_0 und entsprechend Γ_0 auch zulässig. Somit ist Satz 1 mit $H = G_0$, $\mathsf{H} = \Gamma_0$ anwendbar und liefert

$$G\,3\,\Gamma/G_0 \times \Gamma_0 \cong G/G_0\,2\,\Gamma/\Gamma_0.$$

Von Szép ([4], vgl. auch [2]) stammt der Satz: Ist jede der Gruppen G, Γ ein Automorphismenbereich für die andere, d. h. gelten die Relationen

$$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha, \quad b^{\alpha^a} = b^\alpha, \quad (\alpha\beta)^a = \alpha^a \beta^a, \quad \beta^{a^\alpha} = \beta^a,$$

so ist die Faktorgruppe $G\,2\,\Gamma/G_0 \times \Gamma_0$ das direkte Produkt $G/G_0 \times \Gamma/\Gamma_0$. Nach dem Multiplikationsgesetz von $G\,3\,\Gamma$ sind aber diese Relationen identisch erfüllt, also ist der Satz von Szép anwendbar und liefert

$$G\,3\,\Gamma/G_0 \times \Gamma_0 \cong G/G_0 \times \Gamma/\Gamma_0.$$

Das ist das Ergebnis von [1]. (Kochendörffer schreibt der Symmetrie wegen α^β statt β^α; für unsere Zwecke ist das aber unwichtig.)

Im einfach ausgearteten Produkt

$$G\,{*}{*}\,\Gamma : (a, \alpha)\,(b, \beta) = (ab^\alpha, a^b \alpha^b \beta)$$

mit den Strukturrelationen

$$c^{a^b} = c, \qquad a^{a^\beta} = a^a,$$
$$(bc)^\alpha = b^\alpha c^{\alpha^b}, \qquad (\gamma\beta)^a = \gamma^{a^\beta} \beta^a,$$
$$c^{\alpha^\beta} = (c^\beta)^\alpha, \qquad c^{bc} b^c = (cb)^c (c^b)^c,$$
$$c^{a^b \beta} = c^{\beta a^b} = c^\beta, \qquad \gamma^{bc} b^c = (b^\gamma)^c (\gamma^b)^c$$

ist formal $G_0 = G_1 = e$. Aus der Gültigkeit von $c^{\alpha\beta} = (c^\beta)^\alpha$ folgt wieder, daß die Permutationen $\pi_\alpha : c \to c^\alpha$ eine zu Γ homomorphe Gruppe mit dem Kern Γ_1 bilden. Daher ist wieder Γ_1 Normalteiler von Γ und der Satz 2 liefert wegen $G_1 \times \Gamma_1 \cong \Gamma_1$

$$(G ** \Gamma)/\Gamma_1 \cong G\,2\,(\Gamma/\Gamma_1).$$

Das ist das Ergebnis von [4].

Die beiden übrigen Gruppen

$$G \,4\, \Gamma : (a, \alpha)\,(b, \beta) = (ab^\alpha, a^b\alpha\beta),$$
$$G * \Gamma : (a, \alpha)\,(b, \beta) = (ab\beta^a, a^b\alpha^b\beta)$$

lassen sich nicht mit unseren Sätzen behandeln. Es ist auf direktem Wege gezeigt worden ([1], [4]), daß die Gruppe (G, Γ_1) Normalteiler von $G \,4\, \Gamma$ ist und daß

$$G \,4\, \Gamma/(G, \Gamma_1) \cong \Gamma/\Gamma_1$$

ist. Ebenso ist (G_0, Γ) Normalteiler von $G * \Gamma$ und es ist

$$G * \Gamma/(G_0, \Gamma) \cong G/G_0.$$

Es ist merkwürdig, daß man dieselben Beziehungen erhält, wenn man in Satz 2 formal z. B. (G_1, Γ_1) durch (G, Γ_1) ersetzt. (In Wirklichkeit ist diese Ersetzung falsch, denn es ist nicht $(G, \Gamma_1) \cong G \times \Gamma_1$.)

Literaturverzeichnis.

[1] *R. Kochendörffer*, Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte, Journal f. d. reine u. angew. Math. **192** (1953), 96—101.

[2] *L. Rédei*, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, Journal f. d. reine u. angew. Math. **188** (1950), 201—227.

[3] *L. Rédei*, Besprechung der Arbeit [1] im Zbl. f. Math. **51** (1954), 256—257.

[4] *F. Rühs*, Über die einfach ausgearteten Rédeischen schiefen Produkte, Journal f. d. reine u. angew. Math. **198** (1957), 81—86.

[5] *J. Szép*, Über die als Produkt zweier Untergruppen darstellbaren endlichen Gruppen, Comment. Math. Helv. **22** (1949), 31—33.

[6] *J. Szép*, On the structure of groups which can be represented as the product of two subgroups, Acta Sci. Math. **12A** (1950), 57—61.

Eingegangen 30. November 1957.

Zur Theorie Fredholmscher Endomorphismen in nuklearen topologischen Vektorräumen.

Von *Rolf Kultze* in Heidelberg.

Die Fredholmsche Theorie ist in den letzten Jahren von verschiedenen Autoren unter Zugrundelegung geeigneter Operatorenklassen auf lokalkonvexe Vektorräume übertragen worden. Die erste Untersuchung stammt von Smithies [19], der die Fredholm-Theorie auf Hilberträume ausdehnt, während Ruston [14] und Leżański [12] die Theorie in beliebigen Banachräumen durchführen. Sikorski [18] zeigt, daß die Leżańskische Untersuchung allgemeiner als die von Ruston ist. Vor kurzem wurde von Grothendieck [9] unter weitgehender Benutzung der multilinearen Algebra eine Fredholm-Theorie in beliebigen lokalkonvexen Vektorräumen entwickelt, in der die in [8] eingeführten Fredholm-Operatoren eine zentrale Stellung einnehmen.

§ 1 dieser Arbeit enthält eine Fredholm-Theorie in folgenvollständigen, tonnelierten, nuklearen Räumen, die sich auf die Smithiessche Untersuchung zurückführen läßt und wenig Gebrauch von der multilinearen Algebra macht. Die in der Theorie benutzten Endomorphismen sind die Grothendieckschen Fredholm-Operatoren [8]. Von grundlegender Bedeutung für die Untersuchung ist die Tatsache (Satz 1), daß jeder Fredholmsche Endomorphismus K nach [1], [13], [15] in einem geeigneten Hilbertraum einen kompakten Operator $\mathfrak{K}_0$ von *endlicher Doppelnorm* induziert, womit der Anschluß an die Smithiessche Theorie gewonnen ist. Damit erhält man Auflösungsformeln für die Gleichungen

$$(I - \lambda K)\, x = y, \quad (I' - \lambda K')\, x' = y' \qquad (x, y \in E;\ x', y' \in E')$$

(E folgenvollständig, tonneliert, nuklear), sofern λ^{-1} der Resolventenmenge von K angehört (Satz 4). Außerdem werden die Beziehungen von K zu seiner Transponierten K' untersucht, wenn K ein Fredholmscher Operator in E ist (Sätze 2, 3; vgl. auch [10], [13]).

In § 2 werden einige Sätze über das Spektrum von Fredholm-Operatoren in nuklearen tonnelierten Räumen bewiesen, unter Benutzung der Spektraltheorie kompakter Operatoren in Hilberträumen. Ferner werden Fredholm-Operatoren konstruiert, für die die *Existenz* von Eigenwerten bewiesen wird.

In einer anderen Arbeit werde ich eine Fredholm-Theorie in folgenvollständigen, tonnelierten Räumen entwickeln, die wesentlichen Gebrauch von der Leżańskischen Untersuchung [12] machen wird.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. G. Köthe und Herrn Dr. H. G. Tillmann für ihre Hinweise danken.

§ 1. Fredholm-Theorie in folgenvollständigen, tonnelierten, nuklearen Räumen.

Es sei E ein *lokalkonvexer Vektorraum*, d. h. ein topologischer Vektorraum, in dem das Nullelement ein Fundamentalsystem konvexer Nullumgebungen besitzt (vgl. etwa [3], [4], [5], [6]). Die Elemente dieser Nullumgebungsbasis können wir immer als ab-

geschlossen voraussetzen. E sei im folgenden stets separiert. Der Raum E heißt (*folgen-*) *vollständig*, wenn jeder Cauchy-Filter (jede Cauchy-Folge) in E konvergiert. Ein lokalkonvexer Vektorraum heißt *tonneliert*, wenn jede absolutkonvexe, ausgeglichene[1]), abgeschlossene Teilmenge des Raumes eine zur Topologie des Raumes gehörige Nullumgebung ist. E ist ein *M-Raum*, wenn (im Gegensatz zu [4], [5], [10]) jede beschränkte[2]) Teilmenge von R relativkompakt ist. E wird nach Grothendieck [7] als DF-Raum bezeichnet, wenn in E ein abzählbares Fundamentalsystem beschränkter Teilmengen existiert[3]) und der Durchschnitt einer Folge absolutkonvexer, abgeschlossener Nullumgebungen, der die beschränkten Mengen absorbiert, wieder eine Nullumgebung von E ist. Der starke Dual[4]) eines vollständigen, metrisierbaren Raumes (*F-Raumes*) ist ein DF-Raum, umgekehrt ist der starke Dual eines DF-Raumes stets ein F-Raum.

V sei eine beliebige absolutkonvexe Nullumgebung, N_V der Nullraum von V, d. h. die Gesamtheit der Elemente $x \in E$, für die die zu V gehörige Halbnorm $|x|_V$ verschwindet[5]). Mit E_V bezeichnen wir den normierten Quotientenraum E/N_V. $\mathfrak{x} \in E_V$ ist die Menge $\{\tilde{x} : |\tilde{x} - x|_V = 0,\ \tilde{x} \in E\}$ für ein $x \in E$. Die Norm von E_V ist durch $\|\mathfrak{x}\|_V = |x|_V$ definiert, und es gilt $|\tilde{x}|_V = |x|_V$ für alle $\tilde{x} \in \mathfrak{x}$. E_V ist im allgemeinen nicht vollständig, auch dann nicht, wenn E vollständig ist. Mit $\hat{E}_V$ bezeichnen wir die Komplettierung von E_V.

B sei eine absolutkonvexe, beschränkte Teilmenge aus E. E_B bezeichnet dann die lineare Hülle von B, versehen mit der Norm $\|x\|_B = \inf\limits_{x \in \lambda B} |\lambda|$. Die Normtopologie auf E_B ist feiner als die durch E induzierte Topologie.

Lemma 1. *E'_{V^0} ist der Dual von E_V* ([8] ohne Beweit)[6]).

Beweis: Aus $x' \in (N_V)^0$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{x}$ folgt $\langle x_1, x' \rangle = \langle x_2, x' \rangle$, da N_V ein Unterraum von E ist, d. h. $\langle \mathfrak{x}, x' \rangle$ ist eine Bilinearform auf $E_V \times (N_V)^0$. Für $x' \in (E_V)'$ hat man dann $\sup\limits_{\|\mathfrak{x}\|_V \leq 1} |\langle \mathfrak{x}, x' \rangle| < \infty$, d. h. $x' \in E'_{V^0} \subset (N_V)^0$ und

$$\|x'\|_{V^0} = \inf_{x' \in \lambda V^0} |\lambda| = \inf_{x' \in \lambda V^0} |\lambda| \sup_{\|\mathfrak{x}\|_V \leq 1} \left| \langle \mathfrak{x}, \frac{x'}{\lambda} \rangle \right| = \sup_{\|\mathfrak{x}\|_V \leq 1} |\langle \mathfrak{x}, x' \rangle|,$$

w. z. z. w.

Im folgenden setzen wir die Theorie des algebraischen Tensorprodukts als bekannt voraus (vgl. [2]). E und F seien zwei lokalkonvexe Vektorräume[7]), $E \otimes F$ ihr algebraisches Tensorprodukt. Wir erinnern daran, daß ein (algebraischer) Isomorphismus zwischen dem Raum der bilinearen Abbildungen von $E \times F$ in einen Vektorraum N und dem Raum der linearen Abbildungen von $E \otimes F$ in N existiert. $E \otimes F$ kann in verschiedener

---

[1]) $B \subset E$ (E lokalkonvex) ist *absolutkonvex*, wenn aus $x, y \in B$ folgt $\alpha x + \beta y \in B$ für alle komplexen α, β mit $|\alpha| + |\beta| \leq 1$. $C \subset E$ heißt *ausgeglichen*, wenn zu jedem $x \in E$ ein λ mit $x \in \lambda C$ existiert; man sagt C „absorbiert" jedes $x \in E$.

[2]) A heißt *beschränkt*, wenn zu jeder Nullumgebung $V \subset E$ ein λ mit $A \subset \lambda V$ existiert.

[3]) Ein System $\mathfrak{N}$ von beschränkten Mengen heißt *Fundamentalsystem beschränkter Teilmengen*, wenn zu jeder beschränkten Menge A ein $N \in \mathfrak{N}$ existiert mit $A \subset N$.

[4]) d. h. der Raum der stetigen Linearformen auf E, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den beschränkten Teilmengen von E.

[5]) Nach einem bekannten Satz existiert zu jeder absolutkonvexen Nullumgebung V eines lokalkonvexen Raumes eine Halbnorm $|x|_V$, so daß für alle $x \in V$ gilt $|x|_V \leq 1$ und alle x mit $|x|_V < 1$ zu V gehören.

[6]) V^0 bezeichnet die *Polare* von $V \subset E$ in E', d. h. $\{x' \in E' : |\langle x, x' \rangle| \leq 1,\ x \in V\}$, wobei $\langle x, x' \rangle$ die Bilinearform auf $E \times E'$ ist.

[7]) Für das weitere vgl. auch [8] und [17].

Weise mit einer lokalkonvexen Topologie versehen werden; wir beschränken uns im folgenden auf die Definition der *projektiven* und der *induktiven Topologie* von $E \otimes F$. Die projektive (induktive) Topologie $\mathfrak{T}$ von $E \otimes F$ ist in eindeutiger Weise folgendermaßen definiert: $\mathfrak{T}$ ist genau diejenige Topologie, für die der kanonische Isomorphismus zwischen dem Raum der bilinearen Abbildungen von $E \times F$ in einen beliebigen lokalkonvexen Vektorraum G und dem Raum der linearen Abbildungen von $E \otimes F$ in G einen algebraischen Isomorphismus zwischen dem Raum $B(E \times F, G)$ $(\mathfrak{B}(E \times F, G))$ der bilinearen (getrennt) stetigen Abbildungen und dem Raum $L(E \otimes F, G)$ der linearen stetigen Abbildungen induziert. Die induktive Topologie ist mindestens so fein wie die projektive Topologie. Bezeichnen $E \hat{\otimes} F$ bzw. $E \overline{\otimes} F$ die Komplettierung von $E \otimes F$ bezüglich der projektiven bzw. der induktiven Topologie, so gilt $E \overline{\otimes} F \subset E \hat{\otimes} F$.

Ein linearer Operator K eines lokalkonvexen Vektorraumes heißt *beschränkt* (vgl. [15]), wenn in E eine Nullumgebung V existiert, so daß das Bild $K(V)$ in E beschränkt ist. K heißt *kompakt* (*vollstetig*) (vgl. [11]), wenn es in E eine geeignete Nullumgebung V gibt, deren Bild in E relativkompakt ist. Jeder kompakte Operator ist beschränkt. In M-Räumen gilt auch die Umkehrung.

Jedes Element von $E' \hat{\otimes} F$ [8]) (E' versehen mit der Topologie der beschränkten Konvergenz) kann als lineare Abbildung von E in $\hat{F}$ ($\hat{F}$ ist die Komplettierung von F) gedeutet werden. $K \in E' \overline{\otimes} F$ heißt *Fredholm-Operator* von E in F, wenn in E' (bzw. F) eine beschränkte, absolutkonvexe Teilmenge A (bzw. B) existiert, so daß E'_A und F_B vollständig sind und wenn gilt $K \in E'_A \hat{\otimes} F_B$. Bezeichnet A eine absolutkonvexe, gleichstetige, schwach abgeschlossene Teilmenge aus E', B eine absolutkonvexe, beschränkte Teilmenge aus F, so daß F_B vollständig ist, so heißt jedes Element aus $E'_A \hat{\otimes} F_B$ ein *nuklearer Operator*. Jeder nukleare Operator ist kompakt und zugleich ein Fredholm-Operator, die Umkehrung gilt i. a. nicht, da ein Fredholm-Operator nicht notwendigerweise stark stetig zu sein braucht. Jeder Fredholm-Operator von E in F hat die Gestalt:

$$K = \sum_i \lambda_i x'_i \otimes x_i \qquad \{\lambda_i\} \in l_1, \tag{1}$$

wobei die x'_i (bzw. y_i) Elemente einer absolutkonvexen, beschränkten Teilmenge A (bzw. B) aus E'_b [9]) (bzw. F) sind, so daß E'_A und F_B vollständig sind.

Ein lokalkonvexer Vektorraum E heißt *nuklear*, wenn jede lineare stetige Abbildung von E in einen beliebigen Banachraum nuklear ist. *Jeder* [10]) *nukleare Raum ist ein. M-Raum*
Von grundlegender Bedeutung für unsere Untersuchung ist die folgende Eigenschaft der nuklearen Räume:

Lemma 2. *In jedem nuklearen Raum E existiert ein Fundamentalsystem N von absolutkonvexen, abgeschlossenen Nullumgebungen V, so daß $\hat{E}_V$ ein Hilbertraum ist* ([8], chap. II, S. 37).

Wir betrachten nun einen lokalkonvexen Vektorraum E mit der Nullumgebungsbasis $\mathfrak{B} = \{V_i, i \in I\}$ und einen beschränkten Endomorphismus K mit $K(W) \subset B'$ (W eine Nullumgebung aus E, B' beschränkt in E) [11]). Dann existiert ein $V \in \mathfrak{B}$ mit $V \subset W$, $|x|_V$ sei die zu V gehörige Halbnorm. Für K gilt dann, wie man leicht beweist, die Abschätzung

$$|Kx|_i \leqq M_i |x|_V \qquad (i \in I), \tag{2}$$

[8]) und damit von $E' \overline{\otimes} F$.

[9]) E'_b ist der starke Dual von E.

[10]) quasivollständige (vgl. Fußnote [12])).

[11]) Vgl. etwa [15].

woraus sich dann die Ungleichung

$$|Kx|_V \leqq M\,|x|_V$$

herleitet. Die kleinste Zahl M, für die die obige Abschätzung gültig ist, heißt die *V-Schranke von* K und wird mit $|K|_V$ bezeichnet. Es folgt für den Quotientenraum $E_V: K\mathfrak{x} = \mathfrak{y}\ (\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in E_V)$. K induziert in E_V einen beschränkten Operator $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K}\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ und

$$\|\mathfrak{K}\mathfrak{x}\|_V \leqq \|\mathfrak{K}\|_V \|\mathfrak{x}\|_V \qquad (\|\mathfrak{K}\|_V = |K|_V).$$

Ist K kompakt, so folgt daraus nach [13] Lemma 3, 4 die Kompaktheit der Fortsetzung $\mathfrak{K}_0$ von $\mathfrak{K}$ in $\hat{E}_V$.

Das *Spektrum* $\omega(K)$ eines linearen stetigen Operators K in E ist das Komplement der *Resolventenmenge* $\varrho(K)$ aller komplexen λ, für die ein stetiger, auf ganz E eindeutig definierter linearer Operator $R(\lambda, K)$ existiert mit $R(\lambda, K)(\lambda I - K) = (\lambda I - K)\,R(\lambda, K) = I$. λ gehört zum *Punktspektrum* (*ist* ein *Eigenwert von* K), wenn es ein vom Nullelement verschiedenes $x \in E$ gibt mit $Kx = \lambda x$. Das *kontinuierliche Spektrum* ist das Komplement des Punktspektrums bezüglich $\omega(K)$.

Es gilt folgendes wichtige Lemma:

Lemma 3. *Mit Ausnahme höchstens der Null ist das Spektrum eines kompakten Operators K in einem lokalkonvexen Vektorraum mit dem Spektrum von $\mathfrak{K}_0$ identisch* ([13], Lemma 5, 2).

$\mathfrak{H}$ sei ein separabler, nicht notwendig vollständiger Hilbertraum, $\{\varphi_\nu\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem, $\mathfrak{K}$ ein linearer beschränkter Operator in $\mathfrak{H}$. Die Matrix $\{\varkappa_{\nu\mu}\} = \{(\mathfrak{K}\varphi_\mu, \varphi_\nu)\}$ heißt die *Matrixdarstellung von* $\mathfrak{K}$ *bezüglich* $\{\varphi_\nu\}$. Ein Operator $\mathfrak{K}$ mit

$$|||\mathfrak{K}|||^2 = \sum_{\nu,\mu} |\varkappa_{\mu\nu}|^2 = \sum_{\nu,\mu} |(\mathfrak{K}\varphi_\nu, \varphi_\mu)|^2 < \infty$$

heißt von *endlicher Doppelnorm*. In diesem Falle ist die Doppelnorm von der Wahl des vollständigen Orthonormalsystems unabhängig.

Bevor wir mit der Fredholm-Theorie beginnen, werden wir einige Sätze über Fredholm-Operatoren in tonnelierten, nuklearen Räumen beweisen. Bereits oben haben wir erwähnt, daß ein kompakter Operator K in einem geeigneten Raum $\hat{E}_V$ einen kompakten Operator $\mathfrak{K}_0$ induziert. Unter den in dieser Arbeit benutzten Zusatzvoraussetzungen für E induziert jeder Fredholm-Operator K einen kompakten Operator $\mathfrak{K}_0$ von *endlicher Doppelnorm*:

Satz 1. *Jeder Fredholm-Operator K in einem tonnelierten, nuklearen Raum E induziert in einem geeigneten Hilbertraum $\hat{E}_V$ einen kompakten Operator $\mathfrak{K}_0$ von endlicher Doppelnorm, wobei gilt $K(V) < C$ (C beschränkt in E, $V \in N$).*

Beweis: Der Fredholm-Operator K hat nach (1) die Gestalt

$$K = \sum_i \lambda_i x_i' \otimes x_i \qquad \{\lambda_i\} \in l_1,$$

wo die x_i' (bzw. x_i) zu einer absolutkonvexen, beschränkten Teilmenge A (bzw. B) aus E_b' (bzw. E) gehören, so daß E_A' und E_B vollständig sind. Damit ist:

$$Kx = \sum_i \lambda_i < x, x_i' > x_i.$$

Die Polare A^0 von $A < E'$ ist eine Nullumgebung von E. Daher existiert in E nach Lemma 2 eine Nullumgebung $V \in N$ mit $V < A^0$. Wegen $x_i' \in A < A^{00} < V^0$ ergibt sich $x_i' \in E_{V^0}'$,

außerdem gilt für alle $x \in V$ $|\langle x, x_i' \rangle| \leqq 1$. Ist $\mathfrak{B} = \{U_\omega\}$ eine Nullumgebungsbasis aus E, so ist $|x_i|_\omega \leqq M_\omega$ für alle i und jedes ω, da die x_i einer beschränkten Menge $B < E$ angehören. Somit gilt für alle ω die Abschätzung

$$|K(x)|_\omega \leqq \sum_i |\lambda_i| \, |\langle x, x_i' \rangle| \, |x_i|_\omega \leqq M_\omega \sum_i |\lambda_i| < \infty \qquad (x \in V),$$

d. h. $K(V)$ ist eine beschränkte Teilmenge aus E. Der Operator K bestimmt dann unter Berücksichtigung von Lemma 2 in eindeutiger Weise in dem separierten prähilbertschen Quotientenraum E_V einen beschränkten Operator $\mathfrak{K}$, dessen Fortsetzung auf $\hat{E}_V$ mit $\mathfrak{K}_0$ bezeichnet wird. E'_{V^0} ist nach Lemma 1 isometrisch-antiisomorph zur Komplettierung $\hat{E}_V$ von E_V, d. h. zu jedem $x' \in E'_{V^0}$ existiert in eindeutiger Weise ein Element $\mathfrak{x} \in \hat{E}_V$ mit

$$\langle \mathfrak{y}, x' \rangle = (\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) \qquad (\mathfrak{y} \in E_V) \tag{3}$$

und umgekehrt. $\{\Phi_\nu\}$ sei ein vollständiges Orthonormalsystem in E_V. K bildet die Klasse $\Phi_\nu \in E_V$ auf das Element ω_ν der Klasse $\Omega_\nu \in E_V$ ab:

$$K\Phi_\nu = \sum_i \lambda_i < \Phi_\nu, \; x_i' > x_i = \omega_\nu \in \Omega_\nu$$

oder

$$\mathfrak{K}_0 \Phi_\nu = \Omega_\nu. \tag{4}$$

Bei Variation der $x_i \in E$ in ihren Klassen $\mathfrak{x}_i \in E_V$ bleibt (4) unverändert. Vermöge der Zuordnung (3) erhält man so ($\Phi_\mu \leftrightarrow y_\mu' \in E'_{V^0}$):

$$(\mathfrak{K}_0 \Phi_\nu, \Phi_\mu) = \langle K\Phi_\nu, y_\mu' \rangle = \sum_i \lambda_i \langle \Phi_\nu, x_i' \rangle \langle \mathfrak{x}_i, y_\mu' \rangle$$

und weiter

$$|||\mathfrak{K}_0|||^2 = \sum_{\nu,\mu} |(\mathfrak{K}_0 \Phi_\nu, \Phi_\mu)|^2 \leqq \sum_i |\lambda_i| \sum_\nu |\langle \Phi_\nu, x_i' \rangle|^2 \cdot \sum_i |\lambda_i| \sum_\mu |\langle \mathfrak{x}_i, y_\mu' \rangle|^2$$
$$\leqq \sum_i |\lambda_i| \, \|\mathfrak{x}_i'\|_V^2 \cdot \sum_i |\lambda_i| \, \|\mathfrak{x}_i\|_V^2$$

mit $\langle \Phi_\nu, x_i' \rangle = (\Phi_\nu, \mathfrak{x}_i')$ und $\langle \mathfrak{x}_i, y_\mu' \rangle = (\mathfrak{x}_i, \Phi_\mu)$ unter Benutzung der Schwarzschen Summenungleichung und der Vollständigkeitsrelation. Wegen $\|x_i\|_V \leqq M$ und

$$\|x_i'\|_{V^0} = \|\mathfrak{x}_i'\|_V = \inf_{x_i' \in \lambda V^0} |\lambda| \leqq 1$$

folgt schließlich $|||\mathfrak{K}_0||| < \infty$, d. h. $\mathfrak{K}_0$ ist von endlicher Doppelnorm.

Ist K ein Fredholm-Operator in einem lokalkonvexen Raum E, so gibt es genau einen Operator K' in E' mit $\langle Kx, x' \rangle = \langle x, K'x' \rangle$ ($x \in E$, $x' \in E'$), die *Transponierte* von K.

Ist K ein kompakter Operator in einem beliebigen lokalkonvexen Vektorraum E, so ist K' in E_b' i. a. *nicht* kompakt (vgl. etwa [10] oder [13]). Erst bei gewissen Zusatzbedingungen für E kann man die Kompaktheit von K' zeigen ([10]). Unter Ausnutzung dieser Zusatzbedingungen beweisen wir die folgenden beiden Sätze über die Beziehung eines Fredholm-Operators zu seiner Transponierten:

Satz 2. *Der Endomorphismus K eines quasivollständigen*[12]*, tonnelierten, nuklearen Raumes E ist dann und nur dann ein Fredholm-Operator in E, wenn K' in E_b' ein kompakter Operator ist.*

Beweis: Ist K ein Fredholm-Operator in E, so ist K wegen der Tonneliertheit von E nuklear ([8], chap. I, S. 84) und damit kompakt ([8], chap. I, S. 82). Nach Satz 2 [10]

[12]) Ein lokalkonvexer Vektorraum heißt *quasivollständig*, wenn jede beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von E vollständig ist.

(der allgemeiner für tonnelierte M-Räume gilt) folgt aus der Kompaktheit von K in E die Kompaktheit von K' in E'_b, da jeder[13]) nukleare Raum ein M-Raum ist. Umgekehrt folgt nach Satz 2 [10] aus der Kompaktheit von K' in E'_b die Kompaktheit und damit die Beschränktheit von K in E, und da E nach Voraussetzung ein quasivollständiger, nuklearer Raum ist, ist K nach [8], chap. II, cor. 4, S. 39 nuklear und folglich ein Fredholm-Operator ([8], chap. I, S. 83).

Satz 3. *Ist E ein (quasivollständiger, tonnelierter) nuklearer F- (DF-)Raum, so ist K dann und nur dann ein Fredholm-Operator in E, wenn K' ein Fredholm-Operator in E' ist.*

Beweis: E sei ein nuklearer F-Raum. Ist K ein Fredholm-Operator in E, so folgt aus der Tonneliertheit der F-Räume die Kompaktheit von K. E ist ein M-Raum, folglich ist K' in E'_b nach Satz 2 [10] kompakt. E'_b ist nach [4] prop. 7, S. 90 und [8] chap. II théorème 7, S. 40 ein tonnelierter, nuklearer Raum und nach [5] prop. 12 vollständig. Da K' kompakt und folglich beschränkt ist, ist K' in E'_b nach [8], chap. II, cor. 4, S. 39 nuklear und damit ein Fredholm-Operator. Ist umgekehrt K' ein Fredholm-Operator in E'_b, so ist K' kompakt, da E'_b tonneliert ist. Daraus ergibt sich in bekannter Weise die Kompaktheit von K in E und unter nochmaliger Verwendung von [8], chap. II, cor. 4, S. 39 zeigt man, daß K nuklear und somit ein Fredholmscher Operator ist. Ist nun E ein quasivollständiger, tonnelierter, nuklearer DF-Raum, so ist E ein tonnelierter M-Raum. E'_b ist nach [8] chap. II. théorème 7, S. 40 ein nuklearer F-Raum, in dem die beschränkten Mengen relativkompakt sind. Der Satz wird dann in ganz analoger Weise wie oben bewiesen.

Wir wenden uns nun der Ermittlung der Lösungsformeln für die Gleichungen

$$(5) \qquad (K - \mu I)\, x = y, \quad (K' - \mu I')\, x' = y', \qquad (x, y \in E;\ x', y' \in E')$$

zu, wobei K ein Fredholm-Operator in dem folgenvollständigen, tonnelierten, nuklearen Raum E sei.

Die *Fredholmschen Sätze* in lokalkonvexen Vektorräumen sind hinreichend bekannt: Ist K ein kompakter Operator in einem lokalkonvexen Vektorraum, so ist jeder Eigenwert $\neq 0$ von K ein Eigenwert des transponierten Operators K' und umgekehrt. Die Nullräume von $K - \mu I$ und $K' - \mu I'$ haben dieselbe Dimension. Die Gleichungen

$$(K - \mu I)\, x = y, \quad (K' - \mu I')\, x' = y' \qquad (\mu \neq 0)$$

besitzen eine Lösung genau dann, wenn gilt $\langle y, x' \rangle = 0$ bzw. $\langle x, y' \rangle = 0$ für alle x' bzw. x mit $(K' - \mu I')\, x' = 0$ bzw. $(K - \mu I)\, x = 0$. Ist $\mu \neq 0$ kein Eigenwert von K, so sind die Lösungen von (5) eindeutig bestimmt (vgl. [13]). $\mu \neq 0$ ist genau dann ein Eigenwert von K, wenn μ Eigenwert von K', bzw. $\mathfrak{K}_0$, bzw. $\mathfrak{K}'_0$ ist.

Jedem K entspricht nach Satz 1 in eindeutiger Weise ein kompakter Operator $\mathfrak{K}_0$ von endlicher Doppelnorm in der Komplettierung eines geeigneten Quotientenraumes E_V. Ist $\{\varkappa_{\nu\mu}\}$ die Matrixdarstellung von $\mathfrak{K}_0$, so definieren wir

$$\| K \|_V^2 = |||\, \mathfrak{K}_0 \,|||_V^2 = \sum_{\nu,\mu} |\, \varkappa_{\mu\nu} \,|^2 = \sum_{\nu,\mu} |\, (\mathfrak{K}_0 \varphi_\nu, \varphi_\mu) \,|^2 < \infty$$

und erhalten somit die Abschätzungen

$$|\, K \,|_V \leqq \| K \|_V, \quad \| K_1 + K_2 \|_V \leqq \| K_1 \|_V + \| K_2 \|_V, \quad \| \alpha K \|_V = |\, \alpha \,|\, \| K \|_V$$

(vgl. [19]). Die Summe $\sigma^V(K) = \sigma(\mathfrak{K}_0) = \sum_\nu \varkappa_{\nu\nu}$ heißt die *V-Spur von K* und es sei $\sigma_n^V(K) = \sigma^V(K^n)$. Für jeden Fredholm-Operator K existiert $\sigma_n^V(K)$ für alle $n \geqq 2$ wegen

[13]) quasivollständige.

$\sigma_n^V(K) = \sigma_n(\mathfrak{K}_0)$ (vgl. [19]), und es gilt $|\sigma_n^V(K)| \leqq \| K \|_V^n$. Ferner führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\delta_0 = 1,\ \delta_n = \frac{(-1)^n}{n!} \operatorname{Det} Q_n = \frac{(-1)^n}{n!} \begin{vmatrix} 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sigma_2^V & 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \sigma_3^V & \sigma_2^V & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & \\ \sigma_{n-1}^V & \sigma_{n-2}^V & \sigma_{n-3}^V & \cdots & 0 & 1 \\ \sigma_n^V & \sigma_{n-1}^V & \sigma_{n-2}^V & \cdots & \sigma_2^V & 0 \end{vmatrix} \tag{6}$$

$$(n = 1, 2, \ldots),$$

$$\Delta_0 = I,\ \Delta_n = \frac{(-1)^n}{n!} \begin{vmatrix} I & n & 0 & \cdots & 0 \\ K & & & & \\ K^2 & & & & \\ \cdot & & Q_n & & \\ \cdot & & & & \\ K^n & & & & \end{vmatrix}.$$

Die durch Ersetzung von I durch $\mathfrak{J}$ und von K^ν durch $\mathfrak{K}_0^\nu$ aus (6) hervorgehenden Ausdrücke bezeichnen wir mit $\tilde{\Delta}_0$ bzw. $\tilde{\Delta}_n$. Statt (5) betrachten wir nun die äquivalenten Gleichungen

$$(I - \lambda K)\, x = y, \quad (I' - \lambda K')\, x' = y' \qquad (\mu^{-1} = \lambda)$$

und beweisen den folgenden

Satz 4. *K sei ein Fredholm-Operator in dem folgenvollständigen, tonnelierten, nuklearen Raum E mit $K(V) < C$ ($V \in N$, C beschränkt in E)*[14]*. Die Gleichungen*

$$(I - \lambda K)\, x = y, \quad (I' - \lambda K')\, x' = y' \qquad (x, y \in E;\ x', y' \in E')$$

besitzen für alle endlichen λ mit $\lambda^{-1} \in \varrho(K)$ eindeutige Lösungen, die in der Bezeichnungsweise von (6) durch die Ausdrücke

$$x = \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_\nu \lambda^\nu y}{\sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu \lambda^\nu} = \frac{\Delta(\lambda)\, y}{\delta(\lambda)}$$

und (ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $y' \in E'_{V^0}$ voraussetzen)

$$x' = \frac{\Delta_{K'}(\lambda)\, y'}{\delta(\lambda)}$$

mit

$$\Delta_{K'}(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_\nu^{(K')} \lambda^\nu$$

gegeben sind, wobei die $\Delta_\nu^{(K')}$ aus den Δ_ν durch Ersetzung von K durch K' hervorgehen. Das Verschwinden der Fredholm-Determinante $\delta(\lambda)$ ist mit $\lambda^{-1} \in \omega(K)$ und $\lambda^{-1} \in \omega(K')$ äquivalent. Es gelten die Abschätzungen

$$|\delta_n| \leqq \frac{e^{\frac{n}{2}} \| K \|_V^n}{n^{\frac{n}{2}}}, \quad |\Delta_n|_V \leqq \frac{e^{\frac{n+1}{2}} \| K \|_V^n}{n^{\frac{n}{2}}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

$\Delta(\lambda)$ ist für alle λ ein V-beschränkter, stetiger Operator in E. Ist μ^* ein Eigenwert mit der algebraischen Vielfachheit α, so hat $\delta(\lambda)$ für $\lambda^* = (\mu^*)^{-1}$ eine α-fache Nullstelle.

[14]) V wird nach Satz 1 konstruiert.

Beweis: 1. Wir beweisen zunächst die Richtigkeit der Lösungsformel für die Gleichung

$$(I - \lambda K)\, x = y.$$

Nach [19] konvergiert für alle λ die Reihe

$$\delta(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu \lambda^\nu,$$

da K in einem geeigneten Hilbertraum $\hat{E}_V$ den Operator $\mathfrak{K}_0$ von endlicher Doppelnorm induziert. Außerdem ist

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{\Delta}_\nu \lambda^\nu$$

nach [19] für alle λ ein beschränkter Operator in $\hat{E}_V$. Für alle λ, für die die Fredholm-Determinante $\delta(\lambda)$ nicht verschwindet, besitzt die Gleichung

$$(\mathfrak{J} - \lambda \mathfrak{K}_0)\, \mathfrak{x} = \mathfrak{y}$$

für alle $\mathfrak{y} \in \hat{E}_V$ die eindeutige Lösung

$$\mathfrak{x} = \frac{\tilde{\Delta}(\lambda)\, \mathfrak{y}}{\delta(\lambda)}.$$

Für alle $\mathfrak{y} \in E_V$ folgt unter Benutzung von [15] Fußnote 12, daß das Lösungselement $\mathfrak{x}$ in E_V liegt. Daher existiert wegen (2) zu jedem $y \in \mathfrak{y}$ in *eindeutiger* Weise ein $x \in \mathfrak{x}$ mit $(I - \lambda K)\, x = y$. Wir zeigen nun, daß diese Zuordnung durch die Beziehung

$$x = \frac{\Delta(\lambda)\, y}{\delta(\lambda)}$$

mit $\Delta(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_\nu \lambda^\nu$ gegeben ist: Da K in $\hat{E}_V$ den Operator $\mathfrak{K}_0$ induziert, induziert

$$\Delta_n = \delta_n I + \delta_{n-1} K + \cdots + \delta_0 K^n$$

den Operator

$$\tilde{\Delta}_n = \delta_n \mathfrak{J} + \delta_{n-1} \mathfrak{K}_0 + \cdots + \delta_0 \mathfrak{K}_0^n$$

und ebenso bestimmt $\sum_{\nu=0}^{n} \Delta_\nu \lambda^\nu$ in $\hat{E}_V$ den Operator $\sum_{\nu=0}^{n} \tilde{\Delta}_\nu \lambda^\nu$. Wegen $|K|_V = \|\mathfrak{K}_0\|_V$ gilt

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} \Delta_\nu \lambda^\nu \right|_V = \left\| \sum_{\nu=0}^{n} \tilde{\Delta}_\nu \lambda^\nu \right\|_V \leqq \left\| \sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{\Delta}_\nu \lambda^\nu \right\|_V < \infty. \tag{7}$$

Unter Benutzung von

$$\Delta_\nu = \delta_\nu I + K \Delta_{\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

ergibt sich weiter

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} \Delta_\nu \lambda^\nu = I \sum_{\nu=n+1}^{n+p} \delta_\nu \lambda^\nu + \lambda K \sum_{\nu=n}^{n+p-1} \Delta_\nu \lambda^\nu. \tag{8}$$

Aus (7) folgt für alle $n > N(\varepsilon)$ und alle ganzzahlig positiven p

$$\left| \sum_{\nu=n}^{n+p} \Delta_\nu \lambda^\nu \right|_V = \left\| \sum_{\nu=n}^{n+p} \tilde{\Delta}_\nu \lambda^\nu \right\|_V \leqq \varepsilon, \qquad \left| \sum_{\nu=n+1}^{n+p} \delta_\nu \lambda^\nu \right| \leqq \varepsilon. \tag{9}$$

Unter Berücksichtigung von $|Kx|_i \leqq M_i\, |x|_V$ erhält man wegen (8) und (9):

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n+p} \Delta_\nu \lambda^\nu y - \sum_{\nu=0}^{n} \Delta_\nu \lambda^\nu y\right|_i = \left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p} \Delta_\nu \lambda^\nu y\right|_i$$

$$\leqq \left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p} \delta_\nu \lambda^\nu y\right|_i + |\lambda| \left|K\left(\sum_{\nu=n}^{n+p-1} \Delta_\nu \lambda^\nu y\right)\right|_i$$

$$\leqq |y|_i \left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p} \delta_\nu \lambda^\nu\right| + |\lambda| M_i \left|\sum_{\nu=n}^{n+p-1} \Delta_\nu \lambda^\nu y\right|_V$$

$$\leqq \varepsilon |y|_i + |\lambda| M_i \left|\sum_{\nu=n}^{n+p-1} \Delta_\nu \lambda^\nu\right|_V |y|_V \leqq \varepsilon(|y|_i + |\lambda| M_i |y|_V).$$

Da diese Abschätzung für alle $i \in I$ gültig ist, bilden die Summen $\sum_0^n$ in E eine Cauchy-Folge. Aus der Folgenvollständigkeit des Raumes E folgt dann $x \in E$. Daß x eine Lösung der Gleichung $(I - \lambda K)\, x = y$ darstellt, ist unmittelbar nachzuweisen.

Da das Verschwinden der Fredholm-Determinante $\delta(\lambda)$ mit $\lambda^{-1} \in \omega(\mathfrak{K}_0)$ identisch ist, ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

2. Wir wenden uns nun der transponierten Gleichung

$$(I' - \lambda K')\, x' = y'$$

zu. Es sei K' die Transponierte von K und $V \in N$, so daß $K(V)$ beschränkt ist. Mit $\mathfrak{K}_0$ werde wieder der durch K in $\hat{E}_V$ induzierte Operator bezeichnet. Dann gilt

$$|\langle Kx, y'\rangle| \leqq C_{y'} |Kx|_U$$

für eine geeignete Nullumgebung $U \subset E$ (die Wahl der Nullumgebung ist natürlich noch von y' abhängig). Da $K(V)$ beschränkt ist, gilt für alle $x \in V$:

$$|\langle Kx, y'\rangle| = |\langle x, K'y'\rangle| \leqq M_{y'} \qquad (x \in V),$$

d. h. $K'y' \in M_{y'} V^0 \subset E'_{V^0}$ mit $\|K'y'\|_{V^0} = \inf_{K'y' \in \lambda V^0} |\lambda| \leqq M_{y'} < \infty$. Damit ist gezeigt, daß der Bildraum von K' in E'_{V^0} enthalten ist: $K'(E) \subset E'_{V^0}$.

Im folgenden sei $y' \in E'_{V^0}$ und $\mathfrak{K}'_0$ die Transponierte von $\mathfrak{K}_0$. Wegen $K'(E') \subset E'_{V^0}$ ergibt sich dann:

$$\langle x, K'y'\rangle = \langle \mathfrak{x}, K'y'\rangle = \langle Kx, y'\rangle = \langle \mathfrak{K}_0 \mathfrak{x}, y'\rangle = \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{K}'_0 y'\rangle$$

für alle $x \in E$ (bzw. $\mathfrak{x} \in E_V$), d. h. $\mathfrak{K}'_0 y' = K'y'$ $(y' \in E'_{V^0})$ und damit

$$(\mathfrak{K}'_0)^n y' = (K')^n y'. \tag{10}$$

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns nun der Auflösung der transponierten Gleichung

$$(I' - \lambda K')\, x' = y' \tag{11}$$

zu. Zunächst sei $y' \in E'_{V^0}$. (11) läßt sich dann in der Form

$$(\mathfrak{J}' - \lambda \mathfrak{K}'_0)\, x' = y' \qquad (x' \in E'_{V^0})$$

schreiben. Durch Übergang zur adjungierten Abbildung $\mathfrak{K}_0^*$ aus $\hat{E}_V$ erhält man

$$(\mathfrak{J} - \bar{\lambda} \mathfrak{K}_0^*)\, \mathfrak{x} = \mathfrak{y} \qquad (\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \hat{E}_V) \tag{12}$$

mit $x' \leftrightarrow \mathfrak{x}$ und $y' \leftrightarrow \mathfrak{y}$. Diese Gleichung läßt sich nun nach der Smithiesschen Methode lösen [19]. Wie man leicht zeigt, gilt für die Fredholm-Determinante $\delta_{\mathfrak{K}_0^*}(\bar{\lambda})$ von $\mathfrak{K}_0^*$ [16]):

$$\delta_{\mathfrak{K}_0^*}(\bar{\lambda}) = \overline{\delta(\lambda)}.$$

[16]) Um Irrtümer auszuschließen, werden die zu $\mathfrak{K}_0^*$ gehörigen Ausdrücke $\delta(\lambda)$ und $\tilde{\Delta}(\lambda)$ mit einem Index $\mathfrak{K}_0^*$ versehen.

Entsprechend folgt für den Operator $\tilde{\Delta}_{\mathfrak{K}^*}(\bar{\lambda})$:

$$\tilde{\Delta}_{\mathfrak{K}^*}(\bar{\lambda}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{\Delta}_\nu^* \lambda^\nu = \{\tilde{\Delta}(\lambda)\}^*,$$

wobei $\tilde{\Delta}_\nu^*$ die Adjungierte von $\tilde{\Delta}_\nu$ ist. Die Lösung von (12) lautet dann für ein λ mit $\lambda^{-1} \in \varrho(\mathfrak{K}_0)$ (oder was dasselbe ist mit $\lambda^{-1} \in \varrho(K)$):

$$\mathfrak{x} = \frac{\{\tilde{\Delta}(\lambda)\}^* \mathfrak{y}}{\delta(\lambda)}.$$

Wegen

$$\tilde{\Delta}_{\mathfrak{K}^*}(\bar{\lambda}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{\Delta}_\nu^* \bar{\lambda}^\nu$$

ergibt sich unter Benutzung von (10) durch Übergang von $\hat{E}_V$ zum Raum E'_{V° als Lösung der Gleichung (11) für ein $\lambda^{-1} \in \varrho(K')$

$$x' = \frac{\Delta_{K'}(\lambda)\, y'}{\delta(\lambda)} \qquad (y' \in E'_{V^\circ})$$

mit

$$\Delta_{K'}(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_\nu^{(K')} \lambda^\nu,$$

wobei die $\Delta_\nu^{(K')}$ aus den Δ_ν durch Ersetzung von K durch K' hervorgehen. $\Delta_{K'}(\lambda)$ definiert auf E'_{V° einen für alle λ beschränkten Operator[17]).

Ist nun y' ein beliebiges Element aus E', so existiert wegen der Tonneliertheit von E ein $U \in N$ mit $y' \in U^0$. Sei $W \prec U \cap V$ mit $K(V) \prec C$, $W \in N$, C beschränkt; dann ist $y' \in E'_{W^\circ}$. Damit lassen sich die Überlegungen auf den obigen Fall zurückführen.

3. Die Abschätzungen für $|\delta_n|$ und $|\Delta_n|_V$ folgen unmittelbar aus [19]. Da $\tilde{\Delta}(\lambda)$ ein beschränkter Operator in $\hat{E}_V$ ist, ergibt sich nach Definition die V-Beschränktheit von $\Delta(\lambda)$. Die Stetigkeit von $\Delta(\lambda)$ folgt aus der Stetigkeit von $(\mu I - K)^{-1}$ $(\mu = \lambda^{-1})$, vgl. [15]. Für die letzte Behauptung vgl. [20] S. 348ff.

Satz 5. *Sind K_1 und K_2 zwei Fredholm-Operatoren in dem tonnelierten, nuklearen Raum E, deren Produkt die Nulltransformation ergibt, und ist $K = K_1 + K_2$, so gilt für die zugehörigen Fredholm-Determinanten $\delta(\lambda) = \delta_1(\lambda)\, \delta_2(\lambda)$.*

Beweis: Da K_1 und K_2 Fredholm-Operatoren sind, existieren zwei Nullumgebungen $V_1, V_2 \in N$, mit $K_1(V_1) \prec C_1$, $K_2(V_2) \prec C_2$, wo C_1 und C_2 beschränkte Mengen in E sind. Ferner gibt es ein $V \in N$ mit $V \prec V_1 \cap V_2$. $K_1 \cdot K_2$ und $K_1 + K_2$ sind Fredholm-Operatoren in E ([9], S. 367). Dann induzieren $K_1, K_2, K_1 K_2$ und $K_1 + K_2$ in $\hat{E}_V$ die Operatoren $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_1 \cdot \mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2$, die von endlicher Doppelnorm sind. Folglich ist auf diese Operatoren die Fredholmsche Theorie in $\hat{E}_V$ anwendbar. Die Behauptung des Satzes folgt dann aus [20] theorem 1, S. 349.

§ 2. Zur Spektraltheorie Fredholmscher Endomorphismen in tonnelierten nuklearen Räumen.

Zunächst beschäftigen wir uns in diesem Paragraphen mit der *Existenz* von Eigenwerten und Eigenelementen gewisser Fredholm-Operatoren und geben gleichzeitig in Anlehnung an die klassische Theorie in Hilberträumen ein konstruktives Verfahren zur Ermittlung der Eigenwerte an. Dazu führen wir eine neue Definition ein:

[17]) Da die Topologie von E'_{V° feiner als die von E' ist, gilt die Darstellung von x' auch für E'.

Definition. *Ein Fredholmscher Endomorphismus K mit $K(U) < C$ (C beschränkt) in einem tonnelierten, nuklearen Raum E heißt V-symmetrisch ($V < U$), wenn eine geeignete abgeschlossene Nullumgebung V mit $V \in N$ existiert, so daß*

$$\langle K\mathfrak{x}, y' \rangle = \overline{\langle K\mathfrak{y}, x' \rangle}$$

für alle $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in E_V$ und alle $x', y' \in E'_{V^\circ}$ mit $\mathfrak{x} \longleftrightarrow x'$, $\mathfrak{y} \longleftrightarrow y'$ gilt.

Aus der Definition folgt unmittelbar, daß K einen in E_V symmetrischen, beschränkten Operator induziert:

$$(\mathfrak{K}\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \langle K\mathfrak{x}, y' \rangle = \overline{\langle K\mathfrak{y}, x' \rangle} = \overline{(\mathfrak{K}\mathfrak{y}, \mathfrak{x})} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{K}\mathfrak{y}) \qquad (\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in E_V).$$

Daher ist die stetige Fortsetzung von $\mathfrak{K}$ ein in $\hat{E}_V$ selbstadjungierter, kompakter Operator $\mathfrak{K}_0$.

Im folgenden beweisen wir ein *hinreichendes* Kriterium für die V-Symmetrie eines Fredholm-Operators in E:

Satz 6. *Es sei B eine absolutkonvexe, beschränkte Teilmenge aus E, so daß E_B vollständig ist, $\{\lambda_i\} \in l_1$ (λ_i reell), $x_i \in B$ und $V \in N$ eine Nullumgebung von E. Gilt dann $x_i \in \mathfrak{x}_i \longleftrightarrow x'_i$ ($\mathfrak{x}_i \in E_V$) im Sinne von (3), so ist der Operator*

$$K = \sum_i \lambda_i x'_i \otimes x_i$$

ein V-symmetrischer Fredholm-Operator in E.

Beweis: Es sei $x_i \in B$. Dann gilt für ein beliebiges $V \in N$ $\| \mathfrak{x}_i \|_V = | x_i |_V \leqq C_V$, $x_i \in \mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{x}_i \in E_V$. $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_i)$ mit $\mathfrak{x} \in E_V$ definiert auf E_V eine stetige Linearform und damit ein Element $x'_i \in E'_{V^\circ}$: $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_i) = \langle \mathfrak{x}, x'_i \rangle$. Wegen

$$| \langle x, x'_i \rangle | = | \langle \mathfrak{x}, x'_i \rangle | = | (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_i) | \leqq \| \mathfrak{x} \|_V \| \mathfrak{x}_i \|_V \leqq C_V \| \mathfrak{x} \|_V$$

ist für alle x mit $| x |_V \leqq C_V^{-1}$

$$| \langle x, x'_i \rangle | \leqq 1,$$

d. h. $x'_i \in C_V V^0$. Offenbar bilden die x'_i in E' eine gleichstetige Menge, d. h. $K = \sum_i \lambda_i x'_i \otimes x_i$ ist nach [8], chap. I, S. 83 ein nuklearer und somit ein Fredholmscher Operator in E. Die V-Symmetrie von K ist unmittelbar nachzuweisen.

Da Satz 6 ein Verfahren zur Konstruktion V-symmetrischer Fredholm-Operatoren aufzeigt, ist damit die Existenz solcher Endomorphismen bewiesen.

Durch Anwendung der Spektraltheorie selbstadjungierter kompakter Operatoren in Hilberträumen ergibt sich dann der folgende Satz:

Satz 7. *Jeder V-symmetrische Fredholmsche Endomorphismus K eines tonnelierten nuklearen Raumes E besitzt eine endliche oder abzählbar unendliche Folge von nichtverschwindenden reellen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, ($|\lambda_1| \geqq |\lambda_2| \geqq \cdots$) mit den Eigenelementen $x_1, x_2, \ldots$ ($x_\nu \in \Phi_\nu$, wo die Φ_ν die Eigenelemente von $\mathfrak{K}_0$ sind), so daß gilt*

$$| Kx |_V^2 = \sum_\nu | \langle Kx, y'_\nu \rangle |^2$$

$$\langle Kx, y' \rangle = \sum_\nu \lambda_\nu \langle x, y'_\nu \rangle \langle x_\nu, y' \rangle \qquad (y' \in E'_{V^\circ})$$

mit $\Phi_\nu \longleftrightarrow y'_\nu \in E'_{V^\circ}$. Die Eigenwerte bestimmen sich in folgender Weise

$$| \lambda_\nu | = \max_{x \in E} \frac{| Kx |_V}{| x |_V} \quad \textit{mit } | x |_V \neq 0 \textit{ und } \langle x, y'_1 \rangle = \cdots = \langle x, y'_{\nu-1} \rangle = 0.$$

Das Maximum wird für $x = x_\nu$ angenommen. Ferner ist

$$\| y'_\nu \|_{V^\circ} = | x_\nu |_V = 1, \quad \langle x_\nu, y'_\mu \rangle = \delta_{\nu\mu}.$$

Zum Beweis benutze man (3) und Lemma 3.

Im folgenden setzen wir die V-Symmetrie von K nicht mehr voraus. Die Beweise der kommenden Sätze machen wesentlichen Gebrauch von Satz 1.

Satz 8. *$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ($\lambda_\nu \neq 0$) sei eine Folge von Eigenwerten des Fredholmschen Endomorphismus K. Dann gilt*

$$\sum_i | \lambda_i |^2 \leqq \| K \|_V^2 < \infty$$

und außerdem

$$\sigma_n^V(K) = \sum_i (\lambda_i)^n \qquad (n > 2)$$

für alle Nullumgebungen $V \in N$, deren Bilder $K(V)$ in dem tonnelierten, nuklearen Raum E beschränkt sind und die Satz 1 genügen[18]).

Beweis: Die erste Behauptung folgt sofort aus [20] theorem 2, S. 353. Ist V eine der im Satz ausgezeichneten Nullumgebungen, so folgt die Gleichung aus [20] theorem 3, S. 355 wegen $\sigma_n^V(K) = \sigma_n(\mathfrak{K}_0)$. Da aber das Spektrum von K mit dem Spektrum aller induzierten Operatoren bis auf die Null übereinstimmt, gilt die Gleichung für alle im Satz ausgezeichneten Nullumgebungen V. Daher sind in den Q_n von (6) nur die $\sigma_n(K)$ von V abhängig.

Satz 9. *Ein Fredholmscher Endomorphismus K in einem tonnelierten, nuklearen Raum E besitzt genau dann keinen Eigenwert $\neq 0$, wenn für ein geeignetes $V < E$ mit $K(V) < C$ (C beschränkt) gilt:*

$$(*) \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{| K^n x |_V} = 0$$

für alle $x \in E$ ($V \in N$). Aus (*) ergibt sich $\sigma_n^V(K) = 0$ für alle $n \geqq 3$. Ist umgekehrt $\sigma_n^V(K) = 0$ für alle $n > N \geqq 2$, so folgt (*).

Beweis: Der Satz folgt aus [16] S. 57 und aus [20] theorem 4, S. 357 unter Benutzung der Tatsache, daß E_V in $\hat{E}_V$ dicht liegt.

Literatur.

[1] *M. Altman*. On linear functional equations in locally convex linear spaces, Stud. math. 13 (1953), 194—207.
[2] *N. Bourbaki*, Algèbre, 1044, Paris 1948.
[3] *N. Bourbaki*, Espaces vectoriels topologiques, 1189, Paris 1953.
[4] *N. Bourbaki*, Espaces vectoriels topologiques, 1229, Paris 1955.
[5] *J. Dieudonné-L. Schwartz*, La dualité dans les espaces ($\mathfrak{F}$) et ($\mathfrak{L}\mathfrak{F}$), Ann. de l'Institut de Fourier 1 (1949), 61—101.
[6] *A. Grothendieck*, Espaces vectoriels topologiques, São Paulo 1954.
[7] *A. Grothendieck*, Sur les espaces ($\mathfrak{F}$) et ($\mathfrak{L}\mathfrak{F}$), Summa Brasiliensis Mathematicae 3 (1954), 57—121.
[8] *A. Grothendieck*, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Am. Math. Soc. 13 (1955).
[9] *A. Grothendieck*, La théorie de Fredholm, Bull. soc. math. de France 84 (1956), 319—384.
[10] *G. Köthe*, Zur Theorie der kompakten Operatoren in lokalkonvexen Räumen, Port. Math. 13 (1954), 97—104.
[11] *J. Leray*, Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes, Acta scient. math. Szeged 12 (1950), 177—186.

[18]) Die λ_i werden ihrer algebraischen Vielfachheit entsprechend oft gezählt.

[12] *T. Leżański*, The Fredholm theory of linear equations in Banach spaces, Stud. math. **13** (1953), 244—276.
[13] *J. R. Ringrose*, Precompact linear operators in locally convex spaces, Proc. Cambr. Phil. Soc. **53** (1957), 581—591.
[14] *A. F. Ruston*, Direct products of Banach spaces and linear functional equations, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **1** (1951), S. 327—384.
[15] *H. Schaefer*, Positive Transformationen in lokalkonvexen halbgeordneten Vektorräumen, Math. Ann. **129** (1955), 323—329.
[16] *W. Schmeidler*, Lineare Operatoren im Hilbertschen Raum, Stuttgart 1954.
[17] *L. Schwartz*, Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. Applications. Séminaire Schwartz, Année 1953/54, Paris.
[18] *R. Sikorski*, On determinants of Leżański and Ruston, Stud. math. **16** (1957), 99—112.
[19] *F. Smithies*, The Fredholm theory of integral equations, Duke Math. J. **8** (1941), 107—130.
[20] *A. C. Zaanen*, Linear analysis, Amsterdam 1953.

Eingegangen 22. Dezember 1957.

Die Häufigkeitsverteilung gewisser Typen von endlichen Graphen.

Von *Alexander Aigner* in Graz.

Als *Geradlösung* eines endlichen Graphen definierte ich[1]) eine solche Teilmenge seiner Punkte, zu der von jedem Punkt des gesamten Graphen aus eine gerade Anzahl von Kanten führt. Dabei genügt es, Graphen zu betrachten, wo zwischen je zwei Punkten höchstens eine Kante führt; denn die anderen kommen durch Reduktion der Kantenzahl mod. 2 auf solche zurück. Die Gesamtheit der Teilmengen eines Graphen mit n Punkten bildet bezüglich der Mengenaddition mod. 2 eine Abelsche Gruppe der Ordnung 2^n, deren alle Invarianten 2 sind; und die Gesamtheit der Geradlösungen bildet darin eine Untergruppe der Ordnung 2^k, wenn k unabhängige Geradlösungen vorhanden sind. Dabei ist stets $k \equiv n\ (2)$ und $0 \leqq k \leqq n$. Ich will nun diese Typen kurz nach der Anzahl ihrer unabhängigen Geradlösungen mit $0, 1, 2, 3, \ldots$ bezeichnen.

Die folgenden Untersuchungen wenden sich einer Art Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Typen zu. Dabei setzen wir, was auch die sinngerechteste Annahme ist, die Kantenwahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ voraus. Es soll für ein beliebiges Paar unter den n Punkten ebenso wahrscheinlich sein, daß sie verbunden werden, wie daß sie unverbunden bleiben. Dadurch zählen wie die verschiedenen (wenn auch nicht topologisch verschiedenen) Figuren ab, die sich mit den n Punkten zeichnen lassen. Und wir gehen besonders auf die Grenzverteilung für $n \to \infty$ (gerade und ungerade n getrennt) ein, welcher diese Wahrscheinlichkeiten rasch zustreben.

Den Schlüssel zu dieser Berechnung bilden die Übergangsgesetze bei Zufügung eines neuen Punktes: der Typ erhöht oder erniedrigt sich um 1, je nachdem der neue Punkt zu allen bisherigen k unabhängigen Geradlösungen gerade zu liegen kommt oder nicht. Und die Wahrscheinlichkeit dieser beiden Fälle ist auf Grund der Kantenwahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ gleich 2^{-k} bzw. $1 - 2^{-k}$.

Bezeichnen wir die relativen Häufigkeiten h der Typen nach der Punktezahl im oberen und nach der Zahl der unabhängigen Geradlösungen im unteren Index, so lauten die Übergangsformeln:

$$h_{2k}^{(2n)} = \frac{1}{2^{k-1}} h_{2k-1}^{(2n-1)} + \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) h_{2k+1}^{(2n-1)},$$

$$h_{2k+1}^{(2n+1)} = \frac{1}{2^k} h_{2k}^{(2n)} + \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) h_{2k+2}^{(2n)}.$$

Dabei ist noch formal h gleich Null zu setzen, wenn der untere Index negativ wird oder den oberen überschreitet. Ferner ist in trivialer Weise $h_0^{(0)} = h_1^{(1)} = 1$.

---

[1]) *A. Aigner*, Einige Sätze über Lagebeziehungen in endlichen Graphen, Journ. f. r. u. a. Math. **195** (1955), 18–21.

Diese linearen Zusammenhänge lassen sich durch die beiden unendlichen Transformationsmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \dots \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{15}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{63}{64} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{pmatrix}$$

für den Übergang auf ungerade und

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{8} & 0 & \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{31}{32} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{32} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{pmatrix}$$

für den Übergang auf gerade Punktezahl darstellen. Ausgehend von der Grundspalte

$$G = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix},$$

welche der Verteilung $h_0^{(0)} = 1$ oder nach $AG = G$ auch $h_1^{(1)} = 1$ entspricht, werden die Verteilungen für die Punktezahlen 1, 2, 3, 4, ... durch die Transformationen A, BA, ABA, $BABA$ ... oder auch für die Punktezahlen 2, 3, 4, 5 ... durch B, AB, BAB, $ABAB$ ... geliefert. Die Verteilung erscheint in der ersten Spalte der genannten Produkte in der üblichen Matrizenmultiplikation.

Nach der Natur der Matritzen A und B ist in ihnen und damit nach den Multiplikationsgesetzen auch in allen ihren Produkten jede Spaltensumme gleich 1. Dabei wird das erste Element (links oben) in den Potenzen von BA

$$h_0^{(2k)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{31}{32} \cdot \dots \cdot \frac{2^{2k-1} - 1}{2^{2k-1}} \qquad (k \geqq 1)$$

und somit

$$h_1^{(2k-1)} = \frac{7}{8} \cdot \frac{31}{32} \cdot \dots \cdot \frac{2^{2k-1} - 1}{2^{2k-1}} \qquad (k \geqq 2).$$

In der Grenzverteilung, deren Häufigkeiten wir kurz ohne oberen Index schreiben, ergibt sich nebst $h_1 = 2h_0$ daraus sogleich

$$h_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{31}{32} \cdot \dots,$$

ein konvergentes unendliches Produkt, das mit den Eulerschen Produkten sowie mit den Lambertschen Reihen in enger Beziehung steht. Sein numerischer Wert ist 0,4194.... Auf Grund der einfachen, bereits von Euler aufgezeigten Identität

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots \qquad (|x|<1)$$

ergibt sich hier für $x=\frac{1}{2}$ auch

$$h_0 = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{9}\cdot\cdots\cdot\frac{2^k}{2^k+1}\cdots$$

oder nach Relationen für die von K. Knopp[2]) ausführlich behandelten Lambertschen Reihen

$$h_0 = \exp\left(-1+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{4\cdot 15}\cdots+(-1)^n\frac{1}{n\cdot(2^n-1)}\cdots\right).$$

Die Annäherung an diesen Grenzwert erfolgt überdies, aus den endlichen Teilprodukten ersichtlich, ziemlich rasch.

Die weiteren Häufigkeiten ergeben sich aus den im Grenzfalle gültigen Transformationsformeln nach den Matrizen A und B, d. i.

$$h_0 = \frac{1}{2}h_1,\ h_1 = h_0+\frac{3}{4}h_2,\ h_2 = \frac{1}{2}h_1+\frac{7}{8}h_3 \text{ usw.},$$

nacheinander durch h_0 ausgedrückt als

$$h_1 = 2h_0,\ h_2 = \frac{4}{3}h_0,\ h_3 = \frac{8}{21}h_0, \ldots,$$

allgemein

$$h_k = \frac{2^k}{1\cdot 3\cdot 7\cdots(2^k-1)}h_0,$$

Werte, welche mit steigendem k schnell sehr klein werden.

Da nun $h_0+h_2+h_4+\cdots = h_1+h_3+h_5+\cdots = 1$ sein muß, gilt

$$h_0\left(1+\frac{4}{3}+\frac{4^2}{3\cdot 7\cdot 15}+\frac{4^3}{3\cdot 7\cdot 15\cdot 31\cdot 63}+\cdots\right) = 1$$

sowie

$$2h_0\left(1+\frac{4}{3\cdot 7}+\frac{4^2}{3\cdot 7\cdot 15\cdot 31}+\cdots\right) = 1.$$

Diese Beziehungen bestätigen sich auch durch entsprechende Reihenumrechnungen aus dem Eulerschen Produkt

$$\frac{1}{h_0} = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdots.$$

Nun seien noch die numerischen Werte zusammengestellt:

$$h_0 = 0{,}4194 \qquad h_1 = 0{,}8388$$
$$h_2 = 0{,}5592 \qquad h_3 = 0{,}1598$$
$$h_4 = 0{,}0213 \qquad h_5 = 0{,}0014.$$

Die folgenden liegen bereits unterhalb 10^{-4}.

---

[2]) *K. Knopp*, Über Lambertsche Reihen, Journ. f. r. u. a. Math. 142 (1913), 283–315.

Es ist also nicht etwa so, daß bei großer Punktezahl die höheren Typen Übergewicht bekämen; ihr Anteil bleibt vielmehr unerheblich, während die niederen Typen einen bleibenden und sich nur noch wenig ändernden Hauptanteil stellen. Danach läßt sich auch der statistische Durchschnitt (Erwartungswert) der Gesamtzahl von Geradlösungen bei großer Punktezahl ermitteln. Da ein Typ k im ganzen $2^k - 1$ echte Lösungen aufweist, ergibt sich dieser Durchschnittswert als

$$0h_0 + 3h_2 + 15h_4 + \cdots \quad \text{bzw.} \quad 1h_1 + 7h_3 + 31h_5 + \cdots$$

für gerade oder ungerade Punktezahl. Und dies wird genau nach den vorhin angeführten Beziehungen

$$4h_0\left(1 + \frac{4}{3\cdot 7} + \frac{4^2}{3\cdot 7\cdot 15\cdot 31} + \cdots\right) = 2$$

bzw.

$$2h_0\left(1 + \frac{4}{3} + \frac{4^2}{3\cdot 7\cdot 15} + \cdots\right) = 2.$$

Zählt man zu den echten Geradlösungen noch die leere Menge (Einheitselement der Gruppe), so erhält man die Durchschnittsanzahl

$$1h_0 + 4h_2 + 16h_4 + \cdots = 2h_1 + 8h_3 + 32h_5 + \cdots = 3.$$

Diese Gleichungen ergeben sich durch Addition von

$$h_0 + h_2 + h_4 + \cdots = h_1 + h_3 + h_5 + \cdots = 1$$

zu den obigen.

Es sind also im geraden sowohl wie im ungeraden Fall im Grenzdurchschnitt genau zwei echte Geradlösungen vorhanden; dabei ist zu vermerken, daß kein einzelner Graph zwei solche haben kann, denn diese Anzahlen sind $2^k - 1$. — Es gilt denn auch im endlichen System der Durchschnitt $2 - 2^{-n+1}$, und dies läßt sich auch rein apriorisch ableiten: Es ist nämlich für eine beliebige der insgesamt $2^n - 1$ nicht leeren Teilmengen die Wahrscheinlichkeit, eine Geradlösung zu sein, gleich $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Zwar setzt jeder äußere Punkt unabhängig den Faktor $\frac{1}{2}$; die Punkte der Teilmenge liegen aber so gekoppelt, daß sich die betreffende Wahrscheinlichkeit verdoppelt.

Daß, in etwas asymmetrischer Weise, bei ungerader Punktezahl überhaupt immer (mindestens) eine Lösung erscheint, hat seinen Grund darin, daß die Bestimmung, keinen Punkt mit sich selbst zu verbinden, die völlige Symmetrie der beiden Relationen „verbunden" und „nicht verbunden" (etwa abstrakt als r_1 und r_2 zu formulieren) stört. Durch Zulassung der Selbstverbindung wird diese Symmetrie geschaffen, und wir haben dann nicht mehr die charakteristischen Sätze über die Anzahl der Geradlösungen; speziell gibt es auch ungerade Systeme ohne Lösung, z. B. trivial ein mit sich verbundener einzelner Punkt. — Ersetzt man die Bestimmung sogar durch die, daß jeder Punkt mit sich zu verbinden ist, so tauschen die Relationen „verbunden" und „nicht verbunden" ihre Rolle. — Man sieht, wie dies ins Gebiet einer abstrakten Algebraisierung hinüberführt, der es letztlich angehört.

Eingegangen 22. Februar 1958.

Über Anwachsen und Nullstellenverteilung der ganzen transzendenten Lösungen linearer Differentialgleichungen. II.[1])

Von *Klaus Pöschl* in München.

4. Die Methode der zugeordneten Integralgleichung.

Zur asymptotischen Integration von linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung in der komplexen Ebene hat E. Hille [1], [2], [3] ein Verfahren entwickelt, mit dem sich über Anwachsen und Nullstellenverteilung der Lösungen interessante Ergebnisse gewinnen lassen (siehe auch [4]). Später ist es dazu herangezogen worden, einerseits [6] aus dem Aufbau gewisser Riemannscher Flächen Wachstum und Wertverteilung der erzeugenden Funktionen, andererseits [8] aus der Differentialgleichung den Aufbau der von ihren eindeutigen Lösungen erzeugten Riemannschen Flächen zu erschließen. Bei der genannten Methode wird auf die gegebene Differentialgleichung

$$w'' + f_1(z)\, w' + f_2(z)\, w = 0 \tag{4, 01}$$

die Liouvillesche Transformation

$$W(Z) = s(z) \exp\left(\tfrac{1}{2}\int^z f_1(\eta)\, d\eta\right) w(z) = s(z)\, v(z), \qquad Z = \int^z \sqrt{F(\eta)}\, d\eta \tag{4, 02}$$

ausgeübt, worin

$$F(z) = f_2 - \frac{f_1^2}{4} - \frac{f_1'}{2}, \quad s(z) = [F(z)]^{1/4} \tag{4, 03}$$

und der Zweig der Wurzeln geeignet festgelegt ist. Die Koeffizienten f_1 und f_2 in (4, 01) sollen in $z = \infty$ höchstens Pole haben. In den neuen Variablen Z, W entsteht eine Differentialgleichung

$$\frac{d^2 W}{dZ^2} + (1 + \Phi(Z))\, W = 0 \tag{4, 04}$$

mit der Eigenschaft

$$\Phi(Z) = O\left(\frac{1}{Z^{1+\delta}}\right) \tag{4, 05}$$

bei $|Z| \to \infty$, und zwar ist $\delta = 1$ für rationale Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$. Durch eine evtl. Drehstreckung der z-Ebene läßt sich erreichen, daß bei $|z| \to \infty$

$$Z \sim i z^{\frac{K}{2}+1}, \tag{4, 06}$$

wo $z^{\frac{K}{2}+1} \to +\infty$, wenn $z \to +\infty$ für reelle $z = x$. Sind $f_1(z) = p_1(z)$ und $f_2(z) = p_2(z)$ Polynome, so ist[2]) $K = \operatorname{Max}\left(k_1, \frac{k_2}{2}\right)$ gleich dem Grad des Polynoms $F(z)$ und (4, 06)

[1]) Teil I: Dieses Journal, Bd. **199**, S. 121—138.

[2]) Abgesehen von dem Sonderfall $k_2 = 2k_1$, $a_2 = \frac{a_1^2}{4}$.

bedeutet $F(z) = -\left(1 + \frac{K}{2}\right)^2 z^K \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$. Die Gleichung (4, 04) wird nun mit der für große Z „benachbarten" Gleichung

$$\frac{d^2 W_0}{dZ^2} + W_0 = 0 \tag{4, 07}$$

in Zusammenhang gebracht[3]). Dazu bedient man sich der Tatsache, daß eine Lösung W der Volterraschen Integralgleichung 2. Art

$$W(Z) - \int_Z^\infty \sin(T - Z)\, \Phi(T)\, W(T)\, dT = W_0(Z), \tag{4, 08}$$

worin W_0 eine geeignete Lösung von (4, 07) und der Integrationsweg der reellen T-Achse parallel ist, zugleich der Differentialgleichung (4, 04) genügt. Die zugeordnete Integralgleichung (4, 08) wird mit Hilfe sukzessiver Approximationen behandelt, beginnend mit $W_0(Z)$ als Startfunktion (nullter Näherung). Der Kern

$$K(Z, T) = \sin(T - Z)\, \Phi(T) \tag{4, 09}$$

ist das Produkt von $\Phi(T)$ und der durch $W(0) = 0$, $W'(0) = 1$ bestimmten Lösung von (4, 07) vom Argument $T - Z$. Zu jeder Lösung W_0 von (4, 07) gehört eine Lösung W von (4, 04) die zu W_0 asymptotisch ist derart, daß in gewissen sich nach ∞ erstreckenden Gebieten der Z-Ebene

$$W(Z) - W_0(Z) = O\left(\frac{1}{Z^\delta}\right),$$

in anderen

$$\exp(\pm iZ)\, \{W(Z) - W_0(Z)\} = O\left(\frac{1}{Z^\delta}\right)$$

ist, wenn dort W_0 bzw. $\exp(\pm iZ)\, W_0$ beschränkt bleibt. Neben (4, 08) betrachtet man dazu noch die Integralgleichungen, die daraus entstehen wenn W_0 durch $W_0^\pm = \exp(\pm iZ)\, W_0$ und K durch $K^\pm = \exp(\pm i(Z - T))\, K$ ersetzt wird; sie werden durch $W^\pm = \exp(\pm iZ)\, W$ erfüllt und erlauben eine Drehung des Integrationsweges im positiven bzw. negativen Sinne um Winkel bis zu π.

Insbesondere gibt es Lösungen W_h („truncated solutions" nach [2], [3], „defekte Lösungen" nach [6]; $h = 0 \pm 1, \ldots$), die im Winkelraum

$$(h - 1)\pi + \varepsilon < \operatorname{arc} Z < (h + 2)\pi - \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0) \tag{4, 10}$$

asymptotisch sind zu $\exp iZ$ bzw. $\exp(-iZ)$ für gerades bzw. ungerades h, d. h. auf jedem Halbstrahl des Winkelraumes (4, 10) ist

$$W_h(Z) = \exp((-1)^h iZ)\left[1 + O\left(\frac{1}{Z^\delta}\right)\right]. \tag{4, 11}$$

Zwei Funktionen W_h und W_{h+1} bilden ein Fundamentalsystem. Eine beliebige Lösung

$$W = c_1 W_h + c_2 W_{h+1}$$

mit $c_1 c_2 \neq 0$ hat für gerades h in einem beliebig kleinen Winkelraum um die positiv reelle Achse unendlich viele Nullstellen in asymptotisch gleicher Anzahl wie

$$c_1 \exp iZ + c_2 \exp(-iZ) = c \sin(Z - Z_0)$$

---

[3]) Ein anderes Verfahren, das auf diesem Gedanken beruht und auch auf eine Integralgleichung bzw. ein System von zwei Integralgleichungen führt, wird als „Methode von Fubini" bei F. Tricomi [7] beschrieben.

und ist zu dieser Funktion asymptotisch im Winkelraum

$$|\operatorname{arc} Z - (h+1)\pi| < \pi - \varepsilon$$

mit Ausnahme von Umgebungen der Punkte $Z_0 + n\pi$. In der z-Ebene entsprechen (4, 10) Winkelräume

$$\left|\operatorname{arc} z - \frac{2h\pi}{2+K}\right| < \frac{3\pi - \varepsilon}{2+K}, \tag{4, 12}$$

in denen es „defekte Lösungen"

$$w_h(z) = v_h(z) \exp \tfrac{1}{2} \int^z p_1(\eta)\, d\eta \qquad (h = 0, 1, \ldots, K+1) \tag{4, 13}$$

gibt mit höchstens endlich vielen Nullstellen und dem Verhalten

$$\ln v_h(z) \sim (-1)^{h+1} z^{1+\frac{K}{2}}. \tag{4, 14}$$

Jede von w_h und w_{h+1} linear unabhängige Lösung hat in einem beliebig schmalen Winkelraum um den Halbstrahl $\operatorname{arc} z = \dfrac{2h+1}{2+K}\pi$ unendlich viele Nullstellen; die Anzahl dieser Nullstellen mit einem Betrag $\leqq r$ ist asymptotisch durch $r^{1+\frac{K}{2}}/\pi$ gegeben. Zwei defekte Lösungen w_h und $w_{h\pm 1}$ sind linear unabhängig; unter den übrigen, $w_0, \ldots, w_{h-2}, w_{h+2}, \ldots, w_{1+K}$ kann es welche geben, von denen w_h linear abhängt. Ist $\mu_h - 1$ ihre Anzahl, die notwendig $\leqq \dfrac{K}{2}$ ist, so gilt

$$\delta(v_h, 0) = \frac{\mu_h}{1 + \frac{K}{2}}.$$

Soviel kurz über Methode und Ergebnisse bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Bei dem Versuch, das Verfahren auf Gleichungen

$$w^{(m)} + p_1(z)\, w^{(m-1)} + \cdots + p_{m-1}(z)\, w' + p_m(z)\, w = 0 \tag{4, 15}$$

höherer als zweiter Ordnung zu erweitern, kann man von vornherein erwarten, daß dies nicht ohne wesentliche Einschränkungen durchzuführen sein wird. Denn (4, 02) enthält zwei freie Funktionen $s(z)$ und $F(z)$, durch deren geeignete Wahl man die Gleichung (4, 01) mit den zwei Koeffizienten $f_1(z)$ und $f_2(z)$ in die gewünschte Form (4, 04) überführt. Bei mehr als zwei Koeffizienten in der Differentialgleichung, also $m > 2$ in (4, 15), sind allgemein in der Transformation (4, 02) nicht genügend Bestimmungsstücke verfügbar.

Bei der Anwendung von

$$w(z) = v(z) \exp\left(-\frac{1}{m}\int^z p_1(\eta)\, d\eta\right)$$

auf (4, 15) wird zunächst der Koeffizient der zweithöchsten Ableitung weggeschafft. In der entstehenden Differentialgleichung

$$v^{(m)} + q_2(z)\, v^{(m-2)} + \cdots + q_m(z)\, v = 0 \tag{4, 15a}$$

für $v(z)$ drücken sich die Polynome $q_j(z)$, $j = 2, \ldots, m$, durch p_j und die p_i und ihre Ableitungen mit $i < j$ aus. Dann wird, wie in (4, 02), $W(z) = s(z)\, v(z)$ und $Z = \int^z \sqrt{F(\eta)}\, d\eta$ gesetzt. Der transformierten Gleichung in Z und W,

$$L[W] \equiv \frac{d^m W}{dZ^m} + (A_2 + \Psi_2(Z)) \frac{d^{m-2} W}{dZ^{m-2}} + \Psi_3(Z) \frac{d^{m-3} W}{dZ^{m-3}} + \cdots + (A_m + \Psi_m(Z)) = 0, \tag{4, 16}$$

soll wieder eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$(4,17)\quad L_0[W_0] \equiv \frac{d^m W_0}{dZ^m} + A_2 \frac{d^{m-2} W_0}{dZ^{m-2}} + A_4 \frac{d^{m-4} W_0}{dZ^{m-4}} + \cdots + A_m W_0 = 0$$

($A_m = 0$ für ungerades m) „benachbart" sein und eine Integralgleichung

$$(4,18)\qquad W(Z) - \int_Z^\infty K(Z, T)\, W(T)\, dT = W_0(Z)$$

zugeordnet werden können, deren Lösungen auch die Differentialgleichung (4, 16) befriedigen. Für den Kern wird man in Verallgemeinerung von (4, 09) ansetzen

$$(4,19)\qquad K(Z, T) = \sum_{\mu=1}^{m-1} K_\mu\big((-1)^m (T - Z)\big)\, \Phi_\mu(T),$$

wobei die $\Phi_\mu(Z)$ geeignet aus den $\Psi_\nu(Z)$ zu bilden sind und die $K_\mu(S)$ als Funktionen ihres Arguments $S = (-1)^m (T - Z)$ hierbei $m - 1$ linear unabhängige Lösungen von (4, 17) sind,

$$(4,20)\qquad L_0[K_\mu] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Die Matrix $(M_{\mu\nu})$ mit $m - 1$ Zeilen und m Spalten und den Elementen

$$(4,21)\qquad M_{\mu\nu} = (-1)^{\mu(m-1)} K_\mu^{(\nu)}(0) = (-1)^{\mu(m-1)} \left(\frac{d^\nu K_\mu(S)}{dS^\nu}\right)_{S=0}$$

($\mu = 1, 2, \ldots, m-1$; $\nu = 0, 1, \ldots, m-1$) habe also den Rang $m - 1$.

Bei der Gestalt (4, 19) und (4, 20) des Kernes der Integralgleichung dürfen in (4, 16) die Ableitungen $(m-1)$-ter, $(m-3)$-ter usw. Ordnung nicht vorkommen; daher ist von vornherein $A_1 = A_3 \cdots = 0$ und für ungerades m auch $A_m = 0$ gesetzt. Bildet man

$$L_0[W] = L_0[W - W_0] = L_0\left[\int_Z^\infty K W dT\right],$$

beachtet (4, 17) und (4, 18) und ordnet nach Ableitungen von W, so erhält man den Zusammenhang zwischen den Φ_μ und Ψ_ν, und zwar einmal, da in (4, 16) die $(m-1)$-te Ableitung nicht auftreten soll,

$$(4,22\text{a})\qquad \sum_{\mu=1}^{m-1} M_{\mu 0} \Phi_\mu = 0$$

und weiter

$$(4,22\text{b})\quad \Psi_2(Z) = \sum_{\mu=1}^{m-1} \left[\binom{m-1}{1} M_{\mu 0} \Phi'_\mu + M_{\mu 1} \Phi_\mu\right],$$

$$\Psi_3(Z) = \sum_{\mu=1}^{m-1} \left[\binom{m-1}{2} M_{\mu 0} \Phi''_\mu + \binom{m-1}{1} M_{\mu 1} \Phi'_\mu + (M_{\mu 2} + A_2 M_{\mu 0}) \Phi_\mu\right]$$

usf. Das Gleichungs-System (4, 22a, b) läßt sich leicht umformen in

$$(4,23)\qquad \sum_{\mu=1}^{m-1} M_{\mu\nu} \Phi_\mu = \chi_{\nu+1} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m-1),$$

wo die $\chi_{\nu+1}$ linear aus den Ψ_ϱ ($\varrho \leqq \nu + 1$) und ihren Ableitungen bis höchstens zur $(\nu + 1 - \varrho)$-ten Ordnung gebildet sind; speziell ist $\chi_1 = 0$ und $\chi_2 = \Psi_2$. Damit dieses System (4, 23) von m Gleichungen nach den $m - 1$ Funktionen Φ_μ auflösbar ist, muß die erweiterte Matrix

$$(4, 24) \qquad \begin{pmatrix} 0 & \chi_2 & \cdots & \chi_m \\ M_{10} & M_{11} & \cdots & M_{1,m-1} \\ \vdots & & & \\ M_{m-1,0} & M_{m-1,1} & \cdots & M_{m-1,m-1} \end{pmatrix}$$

den Rang $m-1$ haben. Diese Bedingung ist z. B. für

$$(4, 25) \qquad \begin{vmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1,m-1} \\ \vdots & & \\ M_{m-1,1} & \cdots & M_{m,m-1} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ und } M_{\mu 0} = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m-1)$$

erfüllt. Anderenfalls bedeutet das Verschwinden der Determinante der Matrix (4, 24) eine lineare Beziehung zwischen den Funktionen χ_ν.

Der Integrationsweg in (4, 18) soll wieder von $T = Z$ geradlinig nach ∞ laufen. Wenn W_0 im Winkelraum G der Z-Ebene beschränkt und wenn für $T \to \infty$

$$(4, 26) \qquad K(Z, T) = O\left(\frac{1}{T^{1+\delta}}\right)$$

mit $\delta > 0$ erfüllt ist, dann gibt es wie zuvor eine eindeutig bestimmte, durch sukzessive Approximation mit W_0 als Startfunktion zu gewinnende Lösung W der Integralgleichung (4, 18) und zugleich der Differentialgleichung (4, 16); auf jedem in G liegenden Halbstrahl besteht die asymptotische Beziehung

$$W = W_0\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right).$$

Für in G beschränkte Funktionen $K_\mu(S)$ ist Gleichung (4, 26) sicher richtig, wenn für alle $\mu = 1, 2, \ldots, m-1$

$$(4, 27) \qquad \Phi_\mu(Z) = O\left(\frac{1}{Z^{1+\delta}}\right)$$

gilt. Es bleibt zu prüfen, wann die genannten Bedingungen alle erfüllbar sind. Wir beschränken die Diskussion auf Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung, an denen sich die wesentlichen Punkte erkennen lassen.

5. Anwendung der Methode der zugeordneten Integralgleichung auf Differentialgleichungen dritter Ordnung.

Die transformierte Gleichung (4, 10) muß bei Differentialgleichungen dritter Ordnung der Gleichung

$$(5, 01) \qquad \frac{d^3 W_0}{dZ^3} + \frac{dW_0}{dZ} = 0$$

benachbart sein. Wenn man im Kern der Integralgleichung (Gleichung (4, 19) mit $m - 1 = 2$)

$$(5, 02) \qquad K_1(S) = 1 - \cos S, \quad K_2(S) = \sin S$$

wählt, so lautet die Matrix (4, 21)

$$(M_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und erfüllt (4, 25). Nach (4, 22) ist dann

$$(5, 03) \qquad \Phi_2 = \Psi_2, \quad \Phi_1 = \Psi_3 - \Psi_2'.$$

Aus

$$w''' + p_1(z)\, w'' + p_2(z)\, w' + p_3(z)\, w = 0 \tag{5, 04}$$

geht zunächst mittels $v = w \exp\left(\frac{1}{3}\int^z p_1(\eta)\, d\eta\right)$ die Differentialgleichung

$$v''' + q_2(z)\, v' + q_3(z)\, v = 0 \tag{5, 05}$$

hervor mit

$$q_2 = p_2 - p_1' - \frac{p_1^2}{3}, \quad q_3 = p_3 - \frac{p_2 p_1}{3} + \frac{2}{27}\, p_1^3 - \frac{p_1''}{3}.$$

Soll (5, 05) durch $W(Z) = s(z)\, v(z)$, $Z = \int^z \sqrt{F(\eta)}\, d\eta$ einer Differentialgleichung

$$\frac{d^3 W}{dZ^3} + (1 + \Psi_2(Z))\, \frac{dW}{dZ} + \Psi_3(Z)\, W = 0 \tag{5, 06}$$

entsprechen, so ist

$$F(z) = q_2(z), \quad s(z) = (F(z))^{1/2} \tag{5, 07}$$

zu wählen. Dann folgt

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= -\frac{1}{q_2}\left\{\frac{q_2''}{q_2} - \frac{5}{4}\,\frac{q_2'^2}{q_2^2}\right\} = \Phi_2, \\ \Psi_3 &= \frac{1}{q_2^{3/2}}\left\{q_3 - \frac{q_2'}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{q_2'''}{q_2} + \frac{9}{4}\,\frac{q_2' q_2''}{q_2^2} - \frac{15}{8}\,\frac{q_2'^3}{q_2^3}\right\} \end{aligned} \tag{5, 08}$$

und nach (5, 03)

$$\Phi_1 = \frac{1}{q_2^{3/2}}\left\{q_3 - \frac{q_2'}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{q_2'''}{q_2} - \frac{9}{4}\,\frac{q_2' q_2''}{q_2^2} + \frac{15}{8}\,\frac{q_2'^3}{q_2^3}\right\}. \tag{5, 09}$$

Mit $K =$ Grad von q_2 ist

$$\Phi_2 = O(z^{-(K+2)}) = O(Z^{-2})$$

und

$$\Phi_1 - \frac{q_3 - \frac{q_2'}{2}}{q_2^{3/2}} = O\left(z^{-\frac{3}{2}(K+2)}\right) = O(Z^{-3}).$$

Damit auch $\Phi_1 = O(Z^{-1-\delta})$ mit $\delta > 0$ erfüllt ist, muß das Polynom

$$\sigma(z) = q_3 - \frac{q_2'}{2} = p_3 - \frac{p_2'}{2} - \frac{p_2 p_1}{3} + \frac{2}{27}\, p_1^3 - \frac{p_1''}{6} + \frac{1}{3}\, p_1 p_1' \tag{5, 10}$$

einen Grad $< K - 1$ haben. Durch diese Bedingung werden die Differentialgleichungen, auf die das asymptotische Integrationsverfahren anwendbar ist, eingeschränkt auf eine Klasse, die sich unter die Fälle 1 (mit $k_3 = 3k_1$), 2 (mit $k_3 = k_2 + k_1$) und 5 der Tab. I einordnet (siehe Teil I, S. 124).

Setzt man $\exp(\pm iZ)$ für W_0 in die Integralgleichung ein, so erhält man, ganz wie bei den Gleichungen zweiter Ordnung, defekte Lösungen W_λ mit dem Verhalten (4, 11) im Winkelraum (4, 10). Daneben gibt es aber Lösungen $W_{1\lambda}$, die zu $W_0 \equiv 1$ asymptotisch sind. Hier ist zu beachten, daß bei $W_0 \equiv 1$ nur die ursprüngliche Integralgleichung (4, 18) zur Verfügung steht mit zur reellen Achse parallelem Integrationsweg; dieser kann

nicht gedreht werden, da sonst der Kern nicht beschränkt bleibt. Es gibt daher nur Winkelräume

$$(h-1)\pi+\varepsilon<\operatorname{arc} Z<(h+1)\pi-\varepsilon, \tag{5, 11}$$

in denen

$$W_{1h}=1+O\left(\frac{1}{Z}\right) \tag{5, 12}$$

ist; in der Umgebung des Halbstrahls $\operatorname{arc} Z=(h+1)\pi$ können unendlich viele Nullstellen von W_{1h} vorliegen. Die Lösungen W_h, W_{h+1} und W_{1h} (oder W_{h-1}, W_h und W_{1h}) sind linear unabhängig. Eine beliebige Lösung

$$W=c_1W_h+c_2W_{h+1}+c_3W_{1h}$$

ist in (5, 11) asymptotisch zu

$$c_1\exp\left((-1)^h iZ\right)+c_2\exp\left((-1)^{h+1}iZ\right)+c_3,$$

abgesehen von kleinen Umgebungen der Nullstellen. Man kann $\lim\limits_{z\to\infty} q_2(z)\,z^{-K}=-\left(1+\frac{K}{2}\right)^2$ annehmen, so daß wieder (4, 06) gilt; dann besagen diese Ergebnisse in der z-Ebene zusätzlich zu dem in (4. 12) bis (4, 14) ausgedrückten Sachverhalt, daß es in

$$\left|\operatorname{arc} z-\frac{2h-1}{2+K}\pi\right|<\frac{2\pi}{2+K}-\varepsilon \tag{5, 13}$$

Lösungen w_{1h} gibt mit der Eigenschaft

$$\ln w_{1h}\sim-\frac{a_1}{3}\frac{z^{1+k_1}}{1+k_1} \tag{5, 14}$$

für $p_1\not\equiv 0$. Bei Differentialgleichungen vom Typ 5, Tab. I (vgl. Teil I, S. 124), wo alle Lösungen von der Wachstumsordnung $1+\frac{k_2}{2}$ sind, werden für die Lösungen w_{1h} einige der asymptotischen Richtungen (1, 13) ausgelassen. Die Defekte der Lösungen w_h und w_{1h} richten sich wieder nach der Gesamtöffnung der Winkelräume, in denen sie (bis auf endlich viele) frei von Nullstellen sind.

Ist $\sigma(z)\equiv 0$, d. h.

$$v'''+q_2v'+\frac{q_2'}{2}v=0, \tag{5, 15}$$

so lautet die allgemeine Lösung dieser Gleichung

$$v=c_1u_1^2+c_2u_2^2+c_3u_1u_2,$$

wobei u_1 und u_2 ein Fundamentalsystem von

$$u''+\frac{q_2(z)}{4}u=0$$

bilden ([5], Differentialgleichung (3, 15)). Sind u_1 und u_2 defekte Lösungen der letzten Gleichung in zwei aufeinanderfolgenden Winkelräumen (4, 12), so gilt dasselbe für u_1^2 und u_2^2, und im Durchschnitt der beiden Winkelräume, einem Winkelraum (5, 13), hat $w_{1h}=u_1u_2\exp\left(-\frac{1}{3}\int^z p_1(\eta)\,d\eta\right)$ das Verhalten (5, 14). Die Differentialgleichung (5, 15) ist selbstadjungiert.

Im einfachsten Fall $q_2\equiv az$ ist $u_1=H^1_{1/3}\left(\frac{\sqrt{a}}{3}z^{3/2}\right)$ und $u_2=H^2_{1/3}\left(\frac{\sqrt{a}}{3}z^{3/2}\right)$, wo H^1 und H^2 die Hankelschen Zylinderfunktionen sind. Für die oben getroffene Normierung ist $\sqrt{a}=i3/2$.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß bei den hier erfaßten Differentialgleichungen dritter Ordnung

$$v''' + q_2 v' + \left(\frac{q_2'}{2} + \sigma(z)\right) v = 0, \tag{5, 16}$$

wie bei jenen zweiter Ordnung, die Nullstellen einer Lösung für große $|z|$ nur in Winkelräumen beliebig kleiner Öffnung um die Halbstrahlen

$$\operatorname{arc} z = \frac{2h+1}{2+K}\pi \qquad (h = 0, 1, \ldots, K+1) \tag{5, 17}$$

liegen können. Diese „Nullstellenrichtungen" (5, 17) sind gegen die asymptotischen Richtungen (1, 13) für die Punkte maximalen Betrages $|v|$ um $\frac{\pi}{2+K}$ oder ein ungerades Vielfaches davon gedreht.

6. Anwendung der Methode der zugeordneten Integralgleichung auf Differentialgleichungen vierter Ordnung.

Bei Differentialgleichungen vierter Ordnung kommen für die Gleichung (4, 17) mit konstanten Koeffizienten

$$L_0[W_0] = \frac{d^4 W_0}{dZ^4} + A_2 \frac{d^2 W_0}{dZ^2} + A_4 W_0 = 0 \tag{6, 01}$$

im wesentlichen drei Fälle in Betracht:

(6, 02a) a) $A_2 = 0,\ A_4 = -1$;

(6, 02b) b) $A_2 = 1,\ A_4 \neq 0$ beliebig;

(6, 02c) c) $A_2 = 1,\ A_4 = 0$.

Um diejenigen Ausgangs-Differentialgleichungen (4, 15) der Ordnung $m = 4$ für $w(z)$ bzw.

$$v'''' + q_2 v'' + q_3 v' + q_4 v = 0 \tag{6, 03}$$

für $v(z) = w(z) \exp\left(\frac{1}{4}\int^z p_1(\eta)\, d\eta\right)$ zu finden, für die die Methode der zugeordneten Integralgleichung in Verbindung mit einer der Differentialgleichungen (6, 01), (6, 02a—c) anwendbar ist, suchen wir in der Liouvilleschen Transformation die Funktionen $s(z)$ und $F(z)$ geeignet zu bestimmen. Die Differentialgleichung für $W(Z)$ laute wieder

$$\frac{d^4 W}{dZ^4} + (A_2 + \Psi_2(Z)) \frac{d^2 W}{dZ^2} + \Psi_3(Z) \frac{dW}{dZ} + (A_4 + \Psi_4(Z)) W = 0. \tag{6, 04}$$

Damit bei der zugehörigen Differentialgleichung (6, 03) der Koeffizient von v''' verschwindet, muß $\frac{s'}{s} = \frac{3}{4}\frac{F'}{F}$ gelten, d. h. bis auf eine belanglose multiplikative Konstante ist

$$s = F^{3/4}. \tag{6, 05}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} q_2 &= (A_2 + \Psi_2) F + O(z^{-2}), \\ q_3 &= \Psi_3 F^{3/2} + (A_2 + \Psi_2) F' + O(z^{-3}), \\ q_4 &= (A_4 + \Psi_4) F^2 + \frac{3}{4} \Psi_3 F^{1/2} F' + \frac{3}{4} (A_2 + \Psi_2) \left(F'' - \frac{3}{4}\frac{F'}{F}\right) + O(z^{-4}), \end{aligned} \tag{6, 06}$$

wo die Glieder $O(z^{-\nu})$, $\nu = 2, 3, 4$, von der Form $F^{(\nu)}/F$, $F^{(\nu-1)}F'/F^2$ usw. sind. Daraus erkennt man, daß im Falle

$$(6,07\,\text{a}) \qquad \text{a)} \qquad F = (-q_4)^{1/2},$$

$$(6,07\,\text{b und c}) \qquad \text{b) und c)} \quad F = q_2$$

zu wählen ist und daß außerdem im Falle b) $q_4 = A_4 q_2^2 + r_4$ gelten muß mit einem Polynom r_4 von kleinerem Grade als dem von q_2^2. Es sei $K =$ (Grad von q_4)/2 im Falle a) bzw. $K =$ (Grad von q_2) in den Fällen b) und c), so daß $F(z) = O(z^K)$ und $Z = O(z^\Lambda)$ gilt für $|z| \to \infty$ mit $\Lambda = 1 + \frac{K}{2}$. Aus Gleichung (6, 06) bestimmen sich die Funktionen Ψ_ν, z. B. im Fall b)

$$(6,08) \qquad \begin{aligned} \Psi_2 &= O(z^{-2\Lambda}), \\ \Psi_3 &= \frac{q_3 - q_2'}{q_2^{3/2}} + O(z^{-3\Lambda}), \\ \Psi_4 &= \frac{1}{q_2^2}\left\{r_4 - \frac{3}{4}q_2'' - \frac{3}{4}q_3\frac{q_2'}{q_2} + \frac{21}{16}\frac{q_2^2}{q_2}\right\} + O(z^{-4\Lambda}). \end{aligned}$$

Im Fall c) tritt in der letzten Gleichung q_4 an die Stelle von r_4. Die Zusatzglieder in Ψ_ν, $\nu = 2, 3, 4$, die F und seine Ableitungen enthalten, sind auch $O(Z^{-\nu})$. Damit die Funktionen Ψ_ν für $|Z| \to \infty$ stärker als $1/Z$ verschwinden, bestehen im Falle a) die Gradbeschränkungen $< \frac{K}{2} - 1$ für q_2 und $< K - 1$ für q_3; im Falle b) und c) $< K - 1$ für das Polynom $r_3 = q_3 - q_2'$ und $< \frac{3}{2}K - 1$ für die Polynome q_4 bzw. r_4; durch $r_3 \equiv 0$ werden die selbstadjungierten Gleichungen gekennzeichnet. Die rechts im Gleichungssystem (4, 23) stehenden Funktionen χ_ν gehen gemäß

$$(6,09) \qquad \chi_2 = \Psi_2, \quad \chi_3 = \Psi_3 - 2\frac{d\Psi_2}{dZ}, \quad \chi_4 = \Psi_4 - \frac{d\Psi_3}{dZ} + \frac{d^2\Psi_2}{dZ^2} - A_2\Psi_2$$

auf einfache Weise aus den Ψ_ν hervor.

Das Verfahren der zugeordneten Integralgleichung ist anwendbar, wenn sich drei Funktionen $K_\mu(S)$ so bestimmen lassen, daß (4, 20) und (4, 25) erfüllt sind und die Determinante der Matrix (4, 24) verschwindet. Dazu müssen die Fälle a) bis c) getrennt untersucht werden.

Wenn im Fall a) der Integrationsweg in der Integralgleichung parallel zur positiv reellen Achse verläuft, kommen für die $K_\mu(S)$ unter den Lösungen von (6, 01), (6, 02a)

$$(6,10\,\text{a}) \qquad C_1 \sin S + C_2 \cos S + C_3 \exp S + C_4 \exp(-S)$$

nur solche mit $C_3 = 0$ in Frage. Man überzeugt sich leicht, daß es keine drei linear unabhängigen Funktionen aus (6, 10a) mit $C_3 = 0$ gibt, die alle für $S = 0$ verschwinden. Daher ist (4, 25), d. h. $M_{10} = M_{20} = M_{30}$ nicht erfüllbar; es müßte eine lineare Verknüpfung zwischen den Funktionen χ_2, χ_3, χ_4 bestehen, was allgemein nicht der Fall ist. Obwohl also Gleichung (6, 04) und (6, 01) sich in ihren Koeffizienten nur um Glieder $O(Z^{-1-\delta})$ unterscheiden — für Differentialgleichungen $v'''' + q_4(z)\,v = 0$ z. B. ist $\psi_\nu(Z) = O(Z^{-\nu})$ für $\nu = 2, 3, 4$ — kann die Methode der zugeordneten Integralgleichung nicht angewendet werden. Dies liegt daran, daß es keinen Halbstrahl gibt, auf dem alle Lösungen (6, 10a) beschränkt sind.

Dasselbe gilt im Fall c), wo (6, 01), (6, 02c) durch

$$C_1 \sin S + C_2 \cos S + C_3 + C_4 S \tag{6, 10c}$$

befriedigt wird. Wenn für eine der Funktionen Φ_μ, etwa Φ_3,

$$\Phi_3 = O\left(\frac{1}{Z^{2+\delta}}\right)$$

mit $\delta > 0$ gälte, hätte man die Möglichkeit, drei Funktionen $K_\mu(S)$ zu wählen, die sämtlich bei $S = 0$ verschwinden, etwa

$$K_1(S) = D_1(1 - \cos S) + D_2 \sin S,$$
$$K_2(S) = D_3(1 - \cos S) + D_4 \sin S,$$
$$K_3(S) = S$$

mit $D_1 D_4 - D_2 D_3 \neq 0$. Bei der Auflösung des Systems (4, 23) findet man aber

$$\Phi_3 = \chi_2 = \Psi_2 = O\left(\frac{1}{Z^2}\right).$$

Es bleibt Fall b) zu untersuchen. Hier kommt es auf die Lage der Wurzeln der zu (6, 01), (6, 02b) gehörigen charakteristischen Gleichung

$$\alpha^4 + \alpha^2 + A_4 = 0 \tag{6, 11}$$

an; sie seien $\pm i\gamma_{1,2}$. Ein Fundamentalsystem von (6, 01), (6, 02b) ist dann $\exp(\pm i\gamma_1 S)$, $\exp(\pm i\gamma_2 S)$. Wenn sich arc γ_1 von arc γ_2 um einen beliebigen, von 0 und π verschiedenen Wert unterscheidet, treten wieder die bei a) beschriebenen Verhältnisse ein. Für arc $\gamma_1 =$ arc $(\pm \gamma_2)$ hingegen ist $A_4 > 0$, γ_1 und γ_2 reell, etwa positiv; und wenn sie verschieden sind, also $A_4 \neq \frac{1}{4}$[4]), so wird mit den drei Funktionen

$$K_1 = \sin \gamma_1 S, \quad K_2 = \sin \gamma_2 S, \quad K_3 = \cos \gamma_1 S - \cos \gamma_2 S \tag{6, 12}$$

(4, 26) erfüllt. Die Auflösung des Gleichungs-Systems (4, 23) liefert dann die Funktionen

$$\Phi_1 = -\frac{\gamma_2 \chi_2 + \chi_4}{\gamma_1(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)}, \quad \Phi_2 = \frac{\gamma_1 \chi_2 + \chi_4}{\gamma_2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)}, \quad \Phi_3 = -\frac{\chi_3}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2},$$

die (4, 27) unter den oben erwähnten Gradbeschränkungen für $r_3 = q_3 - q_2'$ und $r_4 = q_4 - A_4 q_2^2$ genügen. Die Integralgleichung kann daher auf frühere Weise behandelt werden. Drehungen des Integrationsweges sind bei $\gamma_1 > \gamma_2$ nur nach Multiplikation mit $\exp(\pm i\gamma_1 Z)$ zulässig. Man erhält in Winkelräumen (4, 10) zwei Lösungen, die zu $\exp((-1)^h i\gamma_1 Z)$, und außerdem in

$$(h - 1)\pi - \varepsilon < \text{arc}\, Z < (h + 1)\pi - \varepsilon \tag{6, 13}$$

zwei Lösungen, die zu $\exp(\pm i\gamma_2 Z)$ asymptotisch sind. Diese vier zum selben Wert von h gehörigen Lösungen sind linear unabhängig. Zu den entsprechenden Winkelräumen der z-Ebene gibt es Lösungen v mit dem Verhalten

$$\ln v \sim \pm (\gamma_1 z)^{1+\frac{K}{2}} \tag{6, 14}$$

bzw.

$$\ln v \sim \pm (\gamma_2 z)^{1+\frac{K}{2}}. \tag{6, 15}$$

Bei den hier in Betracht kommenden Differentialgleichungen in v sind die Zahlen $\gamma_{1,2}^{1+\frac{K}{2}}$ die Werte des Typus zur Wachstumsordnung $1 + \frac{K}{2}$. Aus (6, 14) folgt wiederum, daß es

[4]) Hat (6, 11) eine Doppelwurzel, so gibt es keine drei Funktionen $K_\mu(S)$, die auf einem Halbstrahl beschränkt bleiben.

sicher eine Lösung (ja sogar zwei) vom stärkeren Wachstum gibt; doch nichts läßt sich über das schwächere Wachstum aussagen, da (6, 15) nicht in einer vollen Umgebung des Punktes ∞ gültig ist.

Als Beispiel für eine Gleichung b) mit $A_4 > 0$ sei

$$v'''' + q_2 v'' + q_2' v' + \frac{3}{10}\left(\frac{3}{10} q_2^2 + q_2''\right) v = 0$$

angeführt (siehe [5], Differentialgleichung (4, 14)). Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$v = c_1 u_1^3 + c_2 u_1^2 u_2 + c_3 u_1 u_2^2 + c_4 u_2^3,$$

wenn u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von

$$u'' + \frac{q_2}{10} u = 0$$

bilden. Hier ist $A_4 = \frac{9}{100}$ und $\gamma_{1,2}^2 = \frac{5 \pm 4}{10}$. Sind u_1, u_2 linear unabhängige defekte Lösungen in aufeinanderfolgenden Winkelräumen (4, 12), so haben u_1^3 und u_2^3 dort das Verhalten (6, 14), $u_1^2 u_2$ und $u_1 u_2^2$ in ihrem Durchschnitt, dem (6, 13) entsprechenden Winkelraum in der z-Ebene, das Verhalten (6, 15).

Die Übertragung der Methode der zugeordneten Integralgleichung auf Differentialgleichungen (4, 15) höherer Ordnung ist, wie ersichtlich, nur unter sehr speziellen Bedingungen möglich. Differentialgleichungen 4. Ordnung, bei denen sie zum Ziel führt, sind im wesentlichen von der Form

$$(6, 16) \qquad v'''' + q_2 v'' + (q_2' + r_3) v' + (A_4 q_2^2 + r_4) v = 0,$$

wo A_4 eine positive Konstante $\neq \frac{1}{4}$ und r_3 und r_4 Polynome von einem Grad $< K - 1$ bzw. $< \frac{3}{2} K - 1$ sind. Eine solche Gleichung hat u. a. wie die Differentialgleichungen (5, 16) bis auf ein Polynom niedrigeren Grades die Eigenschaft, selbstadjungiert zu sein.

Auch unter den Differentialgleichungen höherer als vierter Ordnung gibt es welche, die dem asymptotischen Integrationsverfahren zugänglich sind; die Lösungen der Differentialgleichung (4, 17) mit konstanten Koeffizienten, die der transformierten Gleichung (4, 16) benachbart ist, müssen dazu sämtlich auf dem gleichen Halbstrahl beschränkt sein.

Für diejenigen Gleichungen (6, 04) bzw. (4, 16), in denen die Funktionen $\Psi_\nu(Z)$ stärker als $1/Z$ gegen Null streben und bei denen trotzdem das Verfahren der zugeordneten Integralgleichung versagt, können evtl. andere asymptotische Integrationsmethoden herangezogen werden.

Literaturverzeichnis.

[1] *E. Hille*, Oscillation theorems in the complex domain. Trans. Amer. Math. Soc. **23** (1922), 350—385.

[2] *E. Hille*, On the zeros of the functions of the parabolic cylinder. Ark. f. Math., Astr. och Fys. **18** (1924), No. 26.

[3] *E. Hille*, Zero point problems for linear differential equations of the second order. Matematisk Tidskrift B, No. **2** (1927), 25—44.

[4] *E. L. Ince*, Ordinary differential equations. New York, Dover Publ.

[5] *E. Kamke*, Gewöhnliche Differentialgleichungen. 3. Aufl., Leipzig (1944).

[6] *R. Nevanlinna*, Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten. Acta math. **58** (1932), 295—373.

[7] *F. G. Tricomi*, Equazioni differenziali. 2. ed. Torino, Einaudi (1953).

[8] *E. Ullrich*, Flächenbau und Wertverteilung. 9. Skand. Math. Kongr. Helsinki (1938).

Eingegangen 16. November 1956.

On Superposability and Self-Superposability Conditions for Hydrodynamic Equations Based on Continuum. II.

By *Richard R. Gold* and *M. Z. v. Krzywoblocki*. University of Illinois.

7. 0 The Superposability Condition for Compressible Non-Newtonian Fluids.

7. 1 *Basic Equations.*

The general equation of motion can be written in the following form:

$$\varrho(U_{i,t} + U_j U_{i,j}) = \varrho F_i + p_{ij,j}, \tag{7. 1. 1}$$

where the stress tensor p_{ij} has been developed in various forms for Newtonian and non-Newtonian fluids as was noted in Chapter 1. We need only note the results of the last chapter along with those of Chapter 5 to see that the extension of the analysis from Newtonian compressible fluids to Non-Newtonian fluids is straightforward. We have seen that the standard self-superposability condition can in general be derived in the form given by equation (3. 2. 1). From this will follow an analysis similar to that of the last chapter. We will show this first by introducing a compressible term into Boussinesq's equation and follow this up with the compressible counterpart of Rivlin's equation, namely Reiner's equation.

With the exception of the equation of motion and the dissipation function which will be noted below, the system of equations remains the same as the last chapter as follows: The energy equation is given by:

$$\varrho C_p(T_{,t} + U_j T_{,j}) = \Phi + (p_{,t} + U_j p_{,j}) + (K T_{,k})_{,k}, \tag{7. 1. 2}$$

$$\Phi = p_{ij}\varepsilon_{ij}. \tag{7. 1. 3}$$

The continuity equation is given by:

$$\varrho_{,t} + (\varrho U_i)_{,i} = 0. \tag{7. 1. 4}$$

The equation of state and expressions for μ and K are respectively:

$$p = \varrho \bar{R} T, \tag{7. 1. 5}$$

$$\mu(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n, \quad K = \mu(aC_v + b). \tag{7. 1. 6, 7}$$

7. 2 *Boussinesq's Equation.*

Let us consider that part of Boussinesq's equation formed by taking equation (5. 3. 1) and adding several compressible terms from equation (1. 2. 1):

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} - \tfrac{2}{3}\mu\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} + 2(A - C)(\varepsilon_{ik}\omega_{kj} + \varepsilon_{jk}\omega_{ki}) + B\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ij}. \tag{7. 2. 1}$$

Differentiating equation (7. 2. 1), expanding the tensors, collecting terms and substituting into equation (7. 1. 1) the equation of motion becomes:

$$
\begin{aligned}
(7.\,2.\,2)\quad \varrho(U_{i,t} + U_j U_{i,j}) = &- p_{,i} + \varrho F_i - \tfrac{2}{3}(\mu U_{k,k})_{,i} + [\mu(U_{i,j} + U_{j,i})]_{,j} \\
&+ (A - C)(U_{k,jj} U_{k,i} + U_{k,ij} U_{k,j} - U_{j,jk} U_{i,k} - U_{i,kj} U_{j,k}) \\
&+ (A - C)_{,j}(U_{k,i} U_{k,j} - U_{i,k} U_{j,k}) \\
&+ \tfrac{1}{2} B[U_{k,kj}(U_{i,j} + U_{j,i}) + U_{k,ki} U_{k,k} + U_{k,k} U_{i,jj}] \\
&+ \tfrac{1}{2} B_{,j} U_{k,k}(U_{i,j} + U_{j,i}).
\end{aligned}
$$

Nondimensionalizing equation (7. 2. 2) by multiplying through by the factor $d(\varrho V^2)^{-1}$ we obtain in terms of nondimensional quantities:

$$
\begin{aligned}
(7.\,2.\,3)\quad U_{i,t} + U_j U_{i,j} = &(\gamma M_0^2)^{-1} P_{,i} + F_i + R^{-1}(U_{i,jj} + \tfrac{1}{3} U_{j,ji}) \\
&- (\mu R)^{-1} \tfrac{2}{3} \mu_{,i} U_{k,k} - \mu_{,j}(U_{i,j} - U_{j,i})) \\
&+ (R_1^{-1} - R_3^{-1})(U_{k,jj} U_{k,i} + U_{k,ij} U_{k,j} - U_{j,jk} U_{i,k} - U_{i,kj} U_{j,k}) \\
&+ (A - C)_{,j}(A - C)^{-1}(R_1^{-1} - R_3^{-1})(U_{k,i} U_{k,j} - U_{i,k} U_{j,k}) \\
&+ (2R_2)^{-1}[U_{k,kj}(U_{i,j} + U_{j,i}) + U_{k,ki} U_{k,k} + U_{k,k} U_{i,jj}] \\
&+ B_{,j}(2BR_2)^{-1} U_{k,k}(U_{i,j} + U_{j,i}),
\end{aligned}
$$

where R_1, R_2 and R_3 are second order Reynold's numbers defined by:

$$(7.\,2.\,4)\qquad R_1 = \varrho d^2 A^{-1},\ R_2 = \varrho d^2 B^{-1},\ R_3 = \varrho d^2 C^{-1},$$

A, B and C being second order coefficients of viscosity with units lb. sec²/ft². For clarity sake, the term $A U_{k,jj} U_{k,i}$, for example, was nondimensionalized as follows:

$$(7.\,2.\,5)\qquad A(\varrho d^2)^{-1}(U_k V^{-1})_{,jj} d^2 (U_k V^{-1})_{,i} d = R_1^{-1} U^*_{k,j*j*} U^*_{k,i*},$$

the stars again later being dropped. As in the preceding chapters:

$$(7.\,2.\,6)\qquad P_{,i} = p_{,i}\varrho^{-1}.$$

It is not necessary to take R_1, R_2, R_3 as parameters for the same reason as R is used as a parameter, namely to maintain a sufficient number of terms in the resultant linearized equation, since these quantities appear in nonlinear expressions to begin with. It is nevertheless necessary to assume that R_1, R_2, R_3 are parameters rather than variables for otherwise we wouldn't be able to associate a function π with such terms as $R_1^{-1} U_{k,jj} U_{k,i}$, $R_3^{-1} U_{k,jj} U_{k,i}$, etc. due to the fact that these terms would be pseudo-linear, a situation which we should like to avoid as was noted in Chapter 3.

Using the four Reynold's numbers as parameters and proceeding in the manner outlined for this case in the previous discussion of Rivlin's equation in Chapter 5, the following superposability equation is obtained:

$$
\begin{aligned}
(7.\,2.\,7)\quad - U'_j U''_{i,j} - U''_j U'_{i,j} = &(\gamma M_0^2)^{-1}(\pi_{,i} + \sum_{n=1}^{15} \pi_{,i}^{(n)}) + R^{-1}[\tfrac{2}{3} U'_{k,k} \cdot (\mu_{,i}\mu^{-1})'' \\
&+ \tfrac{2}{3} U''_{k,k}(\mu_{,i}\mu^{-1})' - U'_{i,j}(\mu_{,j}\mu^{-1})'' - U'_{i,j}(\mu_{,j}\mu^{-1})' \\
&- U'_{j,i}(\mu_{,j}\mu^{-1})'' - U''_{j,i}(\mu_{,j}\mu^{-1})'] \\
&- (R_1^{-1} - R_3^{-1})(U'_{k,jj} U''_{k,i} + U''_{k,jj} U'_{k,i} + U'_{k,ij} U''_{k,j} + U''_{k,ij} U'_{k,j} \\
&- U'_{j,jk} U''_{i,k} - U''_{j,jk} U'_{i,k} - U'_{i,kj} U''_{j,k} - U''_{i,kj} U'_{j,k}) \\
&- (R_1^{-1} - R_3^{-1})\{[(A - C)_{,j}(A - C)^{-1}]' U'_{k,i} U''_{k,j} \\
&+ [(A - C)_{,j}(A - C)^{-1}]' U''_{k,i} U'_{k,j} + [(A - C)_{,j}(A - C)^{-1}]' U''_{k,i} U''_{k,j} \\
&+ [(A - C)_{,j}(A - C)^{-1}]'' U'_{k,i} U'_{k,j} + [(A - C)_{,j}(A - C)^{-1}]'' U'_{k,i} U''_{k,j} + \cdots\}.
\end{aligned}
$$

For self-superposability equation (7. 2. 7) becomes:

$$
\begin{aligned}
(7.2.8)\quad -2U_{j}U_{i,j} = {} & (\gamma M_0^2)^{-1}(\pi_{,i} + \sum_{n=1}^{15} \pi_{,i}^{(n)}) + (\mu R)^{-1}(\tfrac{4}{3}\mu_{,i}U_{k,k} - 2\mu_{,j}(U_{i,j}+U_{j,i})) \\
& - (R_1^{-1} - R_3^{-1})(2U_{k,jj}U_{k,i} + 2U_{k,ij}U_{k,j} - 2U_{j,jk}U_{i,k} - 2U_{i,kj}U_{j,k}) \\
& - (R_1^{-1} - R_3^{-1})(A-C)_{,j}(A-C)^{-1}(6U_{k,i}U_{k,j} - 6U_{i,k}U_{j,k}) \\
& - (2R_2)^{-1}[2U_{k,kj}(U_{i,j}+U_{j,i}) + 2U_{k,ki}U_{k,k} + 2U_{k,k}U_{i,jj}] \\
& - (2R_2)^{-1}B_{,j}B^{-1}(6U_{k,k}U_{i,j} - 6U_{k,k}U_{j,i}).
\end{aligned}
$$

Equation (7. 2. 3) is therefore associated with the following system of equations:

$$
\begin{aligned}
(7.2.9)\quad U_{i,t} = {} & (\gamma M_0^2)^{-1}P_{,i} + F_i + R^{-1}(U_{i,jj} + \tfrac{1}{3}U_{j,ji}) \\
& + (\gamma M_0^2)^{-1}(\tfrac{1}{2}\pi_{,i} + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{7}\pi_{,i}^{(n)} + \tfrac{1}{6}\sum_{n=8}^{9}\pi_{,i}^{(n)} + \tfrac{1}{2}\sum_{n=10}^{13}\pi_{,i}^{(n)} + \tfrac{1}{6}\sum_{n=14}^{15}\pi_{,i}^{(n)});
\end{aligned}
$$

(7. 2. 10a, b) $(\gamma M_0^2)^{-1}\pi_{,i} = -2U_jU_{i,j}$, $(\gamma M_0^2)^{-1}\pi_{,i}^{(1)} = -\mu_{,i}(\mu R)^{-1}\tfrac{4}{3}U_{k,k}$,

(7. 2. 10c, d) $(\gamma M_0^2)^{-1}\pi_{,i}^{(2)} = \mu_{,j}(\mu R)^{-1}\cdot 2U_{i,j}$, $(\gamma M_0^2)^{-1}\pi_{,i}^{(3)} = \mu_{,j}(\mu R)^{-1}\cdot 2U_{j,i}$,

(7. 2. 10e, f) $(\gamma M_0^2)^{-1}\pi_{,i}^{(4)} = (R_1^{-1} - R_3^{-1})\cdot 2U_{k,jj}U_{k,i}$,

$(\gamma M_0^2)^{-1}\pi_{,i}^{(5)} = (R_1^{-1} - R_3^{-1})\cdot 2U_{k,ij}U_{k,j}$,

(7. 2. 10g, h) $(\gamma M_0^2)^{-1}\pi_{,i}^{(6)} = -(R_1^{-1} - R_3^{-1})\cdot 2U_{j,jk}U_{i,k}$,

$(\gamma M_0^2)^{-1}\pi_{,i}^{(7)} = -(R_1^{-1} - R_3^{-1})\cdot 2U_{i,kj}U_{j,k}$,

(7. 2. 10i) $(\gamma M_0^2)^{-1}\pi_{,i}^{(8)} = (R_1^{-1} - R_3^{-1})(A-C)_{,j}(A-C)^{-1}\cdot 6U_{k,i}U_{k,j}$,

(7. 2. 10j) $(\gamma M_0^2)^{-1}\pi_{,i}^{(9)} = -(R_1^{-1} - R_3^{-1})(A-C)_{,j}(A-C)^{-1}\cdot 6U_{i,k}U_{j,k}$,

(7. 2. 10k, l) $(\gamma M_0^2)^{-1}\pi_{,i}^{(10)} = (2R_2)^{-1}\cdot 2U_{k,kj}U_{i,j}$,

$(\gamma M_0^2)^{-1}\pi_{,i}^{(11)} = (2R_2)^{-1}\cdot 2U_{k,kj}U_{j,i}$,

(7. 2. 10m, n) $(\gamma M_0^2)^{-1}\pi_{,i}^{(12)} = (2R_2)^{-1}\cdot 2U_{k,ki}U_{k,k}$,

$(\gamma M_0^2)^{-1}\pi_{,i}^{(13)} = (2R_2)^{-1}\cdot 2U_{k,k}U_{i,jj}$,

(7. 2. 10o, p) $(\gamma M_0^2)^{-1}\pi_{,i}^{(14)} = (2R_2B)^{-1}B_{,j}\cdot 6U_{k,k}U_{i,j}$,

$(\gamma M_0^2)^{-1}\pi_{,i}^{(15)} = -(2R_2B)^{-1}B_{,j}\cdot 6U_{k,k}U_{j,i}$.

An alternate system may be considered by introducing a single scalar function S in a manner similar to that of R in system B used in the analysis of Boussinesq's equation in Chapter 5.

Assuming F can be derived from a potential taking the curl of equation (7. 2. 9) would result in the following equation in U, identical to equation (6. 2. 10), which can readily be solved:

$$(7.2.11)\qquad \nabla\times U_{i,t} = R^{-1}\nabla\times U_{i,jj}.$$

Knowing U, equation (7. 1. 4) becomes simply a linear equation in ϱ which can be solved. Since the Reynold's numbers are parameters, μ, A, B, C are now known as a function of $\varrho(x, y, z, t)$ as follows:

$$(7.2.12)\qquad \mu = \varrho V d R^{-1},\ A = \varrho d^2 R_1^{-1},\ B = \varrho d^2 R_2^{-1},\ C = \varrho d^2 R_3^{-1}.$$

The remainder of the analysis and discussion follows that of the preceding chapter for Newtonian fluids from this point on. The only variation from exact correspondence is the fact that Φ is now a new function of U determined by the new stress tensor p_{ij} by

equations (7. 1. 3) and (7. 2. 1). U having been previously obtained, however, Φ is just a known function. We need only supplement the remainder of the discussion given in the last chapter with the following two observations:

Assuming that the Reynold's number R was a parameter an additional condition was imposed in the form of the equation:

$$\mu(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n = \varrho(x, y, z, t)\, V d R^{-1}. \tag{7. 2. 13}$$

a_n and ϱ being known we see that T must satisfy both the energy equation and equation (7. 2. 13). T must satisfy this overspecified system by virtue of the fact that the initial system became overspecified when R was assumed a parameter. Since A, B and C were unspecified in form by Boussinesq, it seems permissable to speculate that these quantities are also functions of T given by the following power series:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T^n, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n, \quad C = \sum_{n=0}^{\infty} d_n T^n. \tag{7. 2. 14}$$

Assuming that R_1, R_2 and R_3 are parameters T would now have to satisfy in addition to the above overspecified system the following additional equations:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T^n = \varrho d^2 R_1^{-1}, \tag{7. 2. 15}$$

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n = \varrho d^2 R_2^{-1}, \tag{7. 2. 16}$$

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} d_n T^n = \varrho d^2 R_3^{-1}. \tag{7. 2. 17}$$

Three additional equations were then introduced by analogy via the assumption that R_1, R_2 and R_3 were parameters.

In an analogous manner to that of Chapter 6, we can approach the problem of solving the system of equations in question by way of an "eigenvalue" problem. As in Chapter 6, the velocity U can be determined as a function of R from the linearized equation of motion given by equation (7. 2. 11). Substituting only R into the continuity equation used also in Chapter 6:

$$F_1[x, y, z, t;\ \varrho(x, y, z, t),\ T(x, y, z, t),\ R] = 0. \tag{7. 2. 18}$$

The energy equation in the present problem can be written as follows:

$$F_2[x, y, z, t;\ \varrho(x, y, z, t),\ T(x, y, z, t),\ R, R_1, R_2, R_3] = 0. \tag{7. 2. 19}$$

Equations (7. 2. 18), (7. 2. 19) and curl (7. 2. 10) using (7. 1. 6) must be solved simultaneously for ϱ and T with the quantities R, R_1, R_2, R_3 as "eigenvalues". With the possible exception that there are four "eigenvalues" in this problem, the discussion is now the same as in Chapter 6.

The above analysis coupled with that of the Newtonian compressible chapter indicates clearly the mode of solution for the compressible system along with the resultant restrictions incurred. Adding more nonlinear velocity terms as for example in the remainder of Boussinesq's equation or in general for other non-Newtonian equations the resultant equation of motion can be linearized by introducing the self-superposability condition. It has been established that this can always be done in general such that the above outlined technique, i. e., taking the curl of the linearized equation of motion and solving for U, etc., can be applied. For the complete Boussinesq equation or similar equations, equation (7. 2. 11) will remain unchanged.

7. 3 *Reiner Equation.*

For a viscous, isotropic, compressible fluid a non-Newtonian stress tensor has been developed by Reiner as follows:

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + F_0\delta_{ij} + F_1\varepsilon_{ij} + F_2\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}, \tag{7. 3. 1}$$

where F_0, F_1 and F_2 are any functions of the invariants of ε_{ij}, I_1, I_2 and I_3 given by:

$$I_1 = \varepsilon_{ll},\ I_2 = \varepsilon_{mn}\varepsilon_{mn},\ I_3 = \varepsilon_{ab}\varepsilon_{ac}\varepsilon_{cb}. \tag{7. 3. 2}$$

The equation of motion becomes using equations (7. 1. 1) and (7. 3. 1):

$$\begin{aligned} U_{i,t} + U_j U_{i,j} = \bar{F}_i - P_{,i} + F_{0,i}\varrho^{-1} + (2\varrho)^{-1}F_1(U_{i,jj} + U_{j,ji}) \\ + (2\varrho)^{-1}F_{1,j}(U_{i,j} + U_{j,i}) + (4\varrho)^{-1}F_2(U_{k,jj}U_{i,k} + U_{k,jj}U_{k,i} \\ + U_{j,jk}U_{i,k} + U_{j,jk}U_{k,i} + U_{i,kj}U_{k,j} + U_{i,kj}U_{j,k} + U_{k,ij}U_{k,j} + U_{k,ij}U_{j,k}) \\ + (4\varrho)^{-1}F_{2,j}(U_{i,k}U_{k,j} + U_{i,k}U_{j,k} + U_{k,i}U_{k,j} + U_{k,i}U_{j,k}). \end{aligned} \tag{7. 3. 3}$$

Note that in view of the fact that F_0, F_1 and F_2 may be nonlinear functions of U all terms containing ϱ may already be nonlinear without ϱ such that it is no longer necessary to impose the condition that the Reynold's number be a parameter. Using a similar notation to that of section (5. 4) and proceeding in the customary manner, we obtain the following superposability condition:

$$\begin{aligned} -\pi_{,i} - \sum_{n=1}^{17} \pi_{,i}^{(n)} = U_j' U_{i,j}'' + U_j'' U_{i,j}' + F_{0,i}'(\varrho^{-1})' + F_{0,i}''(\varrho^{-1})'' \\ - G_{0,i}\cdot(\varrho' + \varrho'')^{-1} + F_1' U_{i,jj}'(2\varrho')^{-1} + F_1'' U_{i,jj}''(2\varrho'')^{-1} \\ - G_1(U_{i,jj}' + U_{i,jj}'')[2(\varrho' + \varrho'')]^{-1} + F_1' U_{j,ji}'(2\varrho')^{-1} + F_1'' U_{j,ji}''(2\varrho'')^{-1} \\ - G_1(U_{j,ji}' + U_{j,ji}'')[2(\varrho' + \varrho'')]^{-1} + F_{1,j}' U_{i,j}'(2\varrho')^{-1} + F_{1,j}'' U_{i,j}''(2\varrho'')^{-1} \\ - G_{1,j}(U_{i,j}' + U_{i,j}'')[2(\varrho' + \varrho'')]^{-1} + F_{1,j}' U_{j,i}'(2\varrho')^{-1} \\ + F_{1,j}'' U_{j,i}''(2\varrho'')^{-1} - G_{1,j}(U_{j,i}' + U_{j,i}'')[2(\varrho' + \varrho'')]^{-1} + \cdots. \end{aligned} \tag{7. 3. 4}$$

For self-superposability equation (7. 3. 4) becomes:

$$\begin{aligned} -\pi_{,i} - \sum_{n=1}^{17} \pi_{,i}^{(n)} = 2U_j U_{i,j} + (4F_{0,i} - \bar{G}_{0,i})(2\varrho)^{-1} + U_{i,jj}(2F_1 - \bar{G}_1)\cdot(2\varrho)^{-1} \\ + U_{j,ji}(2F_1 - \bar{G}_1)(2\varrho)^{-1} + U_{i,j}(2F_{1,j} - \bar{G}_{1,j})(2\varrho)^{-1} \\ + U_{j,i}(2F_{1,j} - \bar{G}_{1,j})(2\varrho)^{-1} + U_{k,jj}U_{i,k}(F_2 - \bar{G}_2)(2\varrho)^{-1} + \cdots, \end{aligned} \tag{7. 3. 5}$$

where the dots stand for similar terms in the products:

$$U_{k,jj}U_{k,i},\ U_{j,jk}U_{i,k},\ U_{j,jk}U_{k,i},\ U_{i,kj}U_{k,j},$$
$$U_{i,kj}U_{j,k},\ U_{k,ij}U_{k,j},\ U_{k,ij}U_{j,k} +$$

similar terms in $U_{i,k}U_{k,j}$, $U_{i,k}U_{j,k}$, $U_{k,i}U_{k,j}$, $U_{k,i}U_{j,k}$, with the paranthesis now $(F_{2,j} - \bar{G}_{2,j})$.

In a similar approach to the discussion following equation (5. 4. 7) for Rivlin's equation, it is necessary to note the possibility of some terms vanishing in equation (7. 3. 5). Since ϱ is now a variable in addition to the obvious general cases where for example $F_2(U) = \bar{G}_2 \equiv F_2(2U)$ which implies that the term in question is equal to zero there is now the physically possible case of obtaining pseudo linearity by virtue of the fact that ϱ appears in the denominator. This occurs for example when $F_2 = \text{constant} \neq 0$ such that the terms multiplying F_2 in equation (7. 3. 3) would be pseudo linear.

The same general discussion given after equation (5. 4. 7) now applies also. Equation (7. 3. 3) is then associated with the following system of equations:

$$U_{i,t} + P_{,i} - \bar{F}_i = \tfrac{1}{2}\pi_{,i} + (2^m - 2)^{-1} \sum_{n=1}^{17} \pi_{,i}^{(n)}, \tag{7. 3. 6}$$

$$\pi_{,i} = -2\, U_j U_{i,j}, \tag{7. 3. 7a}$$

$$\pi_{,i}^{(1)} = -(4F_{0,i} - \bar{G}_{0,i})\,(2\varrho)^{-1}, \tag{7. 3. 7b}$$

$$\pi_{,i}^{(2)} = -U_{i,jj}(2F_1 - \bar{G}_1)\,(2\varrho)^{-1}, \quad \text{etc.} \tag{7. 3. 7c}$$

Taking the curl of equation (7. 3. 6) results in the equation:

$$\nabla \times U_{i,t} = 0, \tag{7. 3. 8}$$

as was obtained in equation (5. 4. 13). The same discussion previously given applies here also concerning this equation and the rest of the compressible analysis applies as before when we obtain π and $\pi^{(n)}$ from equations (7. 3. 7), ϱ from the linear equation (7. 1. 4), T from the linear equation (7. 1. 2), μ from equation (7. 1. 6) and p from equation (7. 3. 3). Not having introduced R as a parameter, no extra condition is imposed as was previously needed.

As in the analysis of Rivlin's equation with the functions F_0, F_1 and F_2 unspecified, little is gained from the application of self-superposability in view of the essential triviality of the solution U from equation (7. 3. 8). When the functions are specified, we must seek to introduce parameters which may be parameters in the usual sense or possibly "eigenvalues" in a similar manner to the preceding analysis for compressible flow.

8. 0 The Superposability Condition for the Magneto-Hydrodynamic Equations of Motion.

8. 1 *Basic Equations.*

The equation of motion for an incompressible fluid including the effect of electromagnetic body forces is given by:

$$U_{i,t} + (U_i U_k - h_i h_k)_{,k} = -\varrho^{-1}(p + \tfrac{1}{2}\varrho\,|h|^2)_{,i} + \nu U_{i,jj}, \tag{8. 1. 1}$$

where it may be noted that the left hand side contains second order tensor terms of the form noted in Chapter 3 for other equations of motion. For a compressible fluid, the following equation of motion holds:

$$\begin{aligned} \varrho U_{i,t} + \varrho(U_i U_k - h_i h_k)_{,k} &= -(p + \tfrac{1}{2}\varrho\,|h|^2)_{,i} \\ &\quad - \tfrac{2}{3}(\mu U_{k,k})_{,i} + [\mu(U_{i,j} + U_{j,i})]_{,j}. \end{aligned} \tag{8. 1. 2}$$

In addition to the equation of motion, we have something similar to a continuity equation which for incompressible and compressible flow is given by:

$$h_{i,t} + (h_i U_k - U_i h_k)_{,k} = \lambda h_{i,jj}. \tag{8. 1. 3}$$

The new terms used in these equations are defined as follows: h is given by the equation:

$$h = \bar{\mu}^{1/2}(4\pi\varrho)^{-1/2} H, \tag{8. 1. 4}$$

where H is the magnetic field strength at the point considered and $\bar{\mu}$ is the magnetic permeability. λ is given by the equation:

$$\lambda = (4\pi\bar{\mu}\sigma)^{-1}, \tag{8. 1. 5}$$

where σ is the electric conductivity of the fluid. The standard continuity equations for incompressible and compressible fluids are respectively:

$$U_{i,i} = 0, \quad \varrho_{,t} + (\varrho U_i)_{,i} = 0. \tag{8. 1. 6, 7}$$

8. 2 *The Superposability Condition for an Incompressible Fluid.*

The vector quantity h is assumed to be another linear property of the fluid such that the function π is again introduced via the pressure. Proceeding in the standard manner for the equation of motion (8. 1. 1) we obtain the following superposability condition:

$$-(U_i' U_k'' + U_i'' U_k' - h_i' h_k'' - h_i'' h_k')_{,k} = \pi_{,i}. \tag{8. 2. 1}$$

For self-superposability equation (8. 2. 1) becomes:

$$-2(U_i U_k - h_i h_k)_{,k} = \pi_{,i}. \tag{8. 2. 2}$$

The problem is to solve the systen consisting of equations (8. 1. 1), (8. 1. 3) and (8. 1. 6) for the unknowns U, p and h. We associate with this system then the following system of equations:

$$U_{i,t} - \tfrac{1}{2}\pi_{,i} = -\varrho^{-1}(p + \tfrac{1}{2}\varrho\,|h|^2)_{,i} + \nu U_{i,jj}, \tag{8. 2. 3}$$

$$\pi_{,i} = -2\,(U_i U_k - h_i h_k)_{,k}, \tag{8. 2. 4}$$

$$h_{i,t} + (h_i U_k - U_i h_k)_{,k} = \lambda h_{i,jj}, \tag{8. 2. 5}$$

$$U_{i,i} = 0. \tag{8. 2. 6}$$

We assume that the quantities ν, ϱ and λ are constant. A similar discussion to that of Table III in Chapter 4 can now be given for the above system. The general notes which appear at the beginning of Table III apply here also.

Table V.

Techniques of solution:

(a) $\pi(x, y, z, t)$ not given, but arbitrary:

(1) When $\psi(x, y, z, t)$ can be introduced, take the curl of equation (8. 2. 3) and solve the resultant equation which is exactly the same as obtained in Table III under (a), (1) for ψ. Knowing ψ and therefore U we can solve the linear equation (8. 2. 5) with curl (8. 2. 4) for h, equation (8. 2. 4) for π and equation (8. 2. 3) for p. Equation (8. 2. 6) is identically satisfied.

(2) When ψ cannot be introduced, equation (8. 2. 6) and the curl of equation (8. 2. 3) form an overspecified system of two equations in the one unknown U. Solving this for U, h, π and p can be obtained as in (1).

(b) $\pi(x, y, z, t)$ given:

As in Table III a technique can be formulated to solve the given system, but the necessity of solving a nonlinear equation again cannot be avoided.

The additional notes and general remarks of Table III apply also in this case.

8. 3 *The Superposability Condition for a Compressible Fluid.*

We will proceed in a manner similar to that used for the compressible Newtonian flow in Chapter 6 by nondimensionalizing equation (8. 1. 2) and using the Reynold's

number as a parameter or an "eigenvalue". Although the analysis can follow directly from the equation of motion as it stands, it will be more convenient to introduce the scalar function s such that:

$$s = p + \tfrac{1}{2}\varrho\,|h|^2. \tag{8. 3. 1}$$

Multiplying equation (8. 1. 2) through by the factor $d(\varrho V^2)^{-1}$ we obtain the following equation in terms of nondimensional quantities:

$$\begin{aligned} U_{i,t} + (U_i U_k - h_i h_k)_{,k} = &- S_{,i} + R^{-1}(U_{i,jj} + \tfrac{1}{3} U_{j,ji}) \\ &- (\mu R)^{-1}(\tfrac{2}{3}\mu_{,i} U_{k,k} - \mu_{,j}(U_{i,j} + U_{j,i})), \end{aligned} \tag{8. 3. 2}$$

where:

$$S_{,i} = s_{,i}\varrho^{-1}. \tag{8. 3. 3}$$

The superposability equation becomes introducing the scalar function π via the term S:

$$\begin{aligned} -(U_i' U_k'' + U_i'' U_k' - h_i' h_k'' - h_i'' h_k')_{,k} \\ = \pi_{,i} + R^{-1}[\tfrac{2}{3} U_{k,k}'(\mu_{,i}\mu^{-1})'' + \tfrac{2}{3} U_{k,k}''(\mu_{,i}\mu^{-1})' - U_{i,j}'(\mu_{,j}\mu^{-1})'' \\ - U_{i,j}''(\mu_{,j}\mu^{-1})' - U_{j,i}'(\mu_{,j}\mu^{-1})'' - U_{j,i}''(\mu_{,j}\mu^{-1})'], \end{aligned} \tag{8. 3. 4}$$

where just one scalar function has been introduced to represent all the nonlinear terms in the equation. For self-superposability, equation (8. 3. 4) becomes:

$$-2(U_i U_k - h_i h_k)_{,k} = \pi_{,i} + (\mu R)^{-1}(\tfrac{4}{3}\mu_{,i} U_{k,k} - 2\mu_{,j}(U_{i,j} + 2U_{j,i})). \tag{8. 3. 5}$$

Equation (8. 1. 2) or (8. 3. 2) is therefore associated with the following system of equations:

$$U_{i,t} + S_{,i} = R^{-1}(U_{i,jj} + \tfrac{1}{3} U_{j,ji}) + \tfrac{1}{2}\pi_{,i}, \tag{8. 3. 6}$$

$$-\pi_{,i} = 2(U_i U_k - h_i h_k)_{,k} + (\mu R)^{-1}(\tfrac{4}{3}\mu_{,j} U_{k,k} - 2\mu_{,j}(U_{i,j} + U_{j,i})). \tag{8. 3. 7}$$

Taking the curl of equation (8. 3. 6) would result in the following linear equation in U, identical to equation (6. 2. 10), which can be solved with curl (8. 3. 7):

$$\nabla \times U_{i,t} = R^{-1}\nabla \times U_{i,jj}. \tag{8. 3. 8}$$

It is generally accepted that the equation of state for magneto-hydrodynamics can still be taken to be $p = R\varrho T$. The analysis of section 6. 2 would now follow exactly here in every detail using the expression for the energy equation analogous to (6. 1. 2). It would therefore be necessary to determine the form of the energy equation for incompressible and compressible (electromagnetic) flow to complete the analysis of this chapter.

9. 0 The Potential Equation.

9. 1 *General Discussion.*

One of the most basic equations of gas dynamics is the potential equation which for steady motion with no external forces is given by:

$$\begin{aligned} (1 - a^{-2}\Phi_{,x}^2)\Phi_{,xx} + (1 - a^{-2}\Phi_{,y}^2)\Phi_{,yy} + (1 - a^{-2}\Phi_{,z}^2)\Phi_{,zz} \\ - 2a^{-2}\Phi_{,x}\Phi_{,y}\Phi_{,xy} - 2a^{-2}\Phi_{,x}\Phi_{,z}\Phi_{,xz} - 2a^{-2}\Phi_{,y}\Phi_{,z}\Phi_{,yz} = 0, \end{aligned} \tag{9. 1. 1}$$

where the velocity potential function Φ is defined in the usual manner as follows:

$$U_i \equiv \Phi_{,i}. \tag{9. 1. 2}$$

For an isotropic flow, using the equation of state for a perfect gas, the speed of sound a can be expressed in the following form from Bernoulli's equation:

$$a^2 = a_0^2 - \tfrac{1}{2}(\gamma - 1)(\Phi_{,x}^2 + \Phi_{,y}^2 + \Phi_{,z}^2), \tag{9. 1. 3}$$

where a_0 is the speed of sound at $U_i = 0$, a constant, and γ is the customary ratio of specific heats, assumed constant. Equation (9. 1. 1) contains therefore the one unknown Φ and in the given form it is extremely difficult, if possible, to apply superposability in the established manner. We will therefore apply a limiting process to solve the potential equation using self-superposability as a vital link in the analysis.

The stream function equation is similar in nature to the potential equation such that it will not be necessary to treat it separately.

9. 2. *The Proposed Limiting Process for the Solution of the Potential Equation.*

Assume Φ can be represented by the following expression:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{(n)}, \tag{9. 2. 1}$$

where n is used as a superscript. Equation (9. 1. 1) can now be written in the following form:

$$\begin{aligned} &\{a_0^2 - \tfrac{1}{2}(\gamma-1)[(\sum_n \Phi_{,x}^{(n)})^2 + (\sum_n \Phi_{,y}^{(n)})^2 + (\sum_n \Phi_{,z}^{(n)})^2]\}(\sum_n \Phi_{,xx}^{(n)} + \sum_n \Phi_{,yy}^{(n)} + \sum_n \Phi_{,zz}^{(n)}) \\ &= (\sum_n \Phi_{,x}^{(n)})^2(\sum_n \Phi_{,xx}^{(n)}) + (\sum_n \Phi_{,y}^{(n)})^2(\sum_n \Phi_{,yy}^{(n)}) + (\sum_n \Phi_{,z}^{(n)})^2(\sum_n \Phi_{,zz}^{(n)}) \\ &+ 2(\sum_n \Phi_{,x}^{(n)})(\sum_n \Phi_{,y}^{(n)})(\sum_n \Phi_{,xy}^{(n)}) + 2(\sum_n \Phi_{,x}^{(n)})(\sum_n \Phi_{,z}^{(n)})(\sum_n \Phi_{,xz}^{(n)}) \\ &+ 2(\sum_n \Phi_{,y}^{(n)})(\sum_n \Phi_{,z}^{(n)})(\sum_n \Phi_{,yz}^{(n)}). \end{aligned} \tag{9. 2. 2}$$

The potential equation being a scalar equation, we will introduce a scalar constant π (tensor of order 0—3) in accordance with the basic discussion of Chapter 3. We will associate in general a constant $\pi^{(n)}$ with each $\Phi^{(n)}$. Variing slightly from the established procedure, each $\pi^{(n)}$ will be introduced via the corresponding $\Phi^{(n)}$ in successive steps. Applying equation (3. 2. 1) to equation (9. 2. 2) where $\pi^{(0)}$ has been introduced through $\Phi^{(0)}$ we obtain the following self-superposability condition:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\gamma - 1)\cdot 6FG = &-6(\sum_n \Phi_{,x}^{(n)})^2(\sum_n \Phi_{,xx}^{(n)}) - 6(\sum_n \Phi_{,y}^{(n)})^2(\sum_n \Phi_{,yy}^{(n)}) \\ &-6(\sum_n \Phi_{,z}^{(n)})^2(\sum_n \Phi_{,zz}^{(n)}) - (2\times 6)(H + I + J) + \end{aligned} \tag{9. 2. 3}$$

terms containing some derivatives of $\pi^{(0)}$,

where:

$$F \equiv (\sum_n \Phi_{,x}^{(n)})^2 + (\sum_n \Phi_{,y}^{(n)})^2 + (\sum_n \Phi_{,z}^{(n)})^2, \tag{9. 2. 4}$$

$$G \equiv \sum_n \Phi_{,xx}^{(n)} + \sum_n \Phi_{,yy}^{(n)} + \sum_n \Phi_{,zz}^{(n)}, \tag{9. 2. 5}$$

$$H \equiv (\sum_n \Phi_{,x}^{(n)})(\sum_n \Phi_{,y}^{(n)})(\sum_n \Phi_{,xy}^{(n)}), \tag{9. 2. 6}$$

$$I \equiv (\sum_n \Phi_{,x}^{(n)})(\sum_n \Phi_{,z}^{(n)})(\sum_n \Phi_{,xz}^{(n)}), \tag{9. 2. 7}$$

$$J \equiv (\sum_n \Phi_{,y}^{(n)})(\sum_n \Phi_{,z}^{(n)})(\sum_n \Phi_{,yz}^{(n)}). \tag{9. 2. 8}$$

Since $\pi^{(0)}$ is a constant, equation (9. 2. 3) implies equation (9. 2. 10), given below, which is simply the sum of all nonlinear terms in the original equation (9. 2. 2). Equation (9. 2. 2) is therefore associated with the following system of equations:

$$a_0^2 G = a_0^2 (\sum_n \nabla^2 \Phi^{(n)}) = 0, \tag{9. 2. 9}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\gamma - 1) FG + (\sum_n \Phi_{,x}^{(n)})^2 (\sum_n \Phi_{,xx}^{(n)}) + (\sum_n \Phi_{,y}^{(n)})^2 (\sum_n \Phi_{,yy}^{(n)}) \\ + (\sum_n \Phi_{,z}^{(n)})^2 (\sum_n \Phi_{,zz}^{(n)}) + 2(H + I + J) = 0. \end{aligned} \tag{9. 2. 10}$$

From equation (9. 2. 9) since $a_0^2 \neq 0$ we have, in particular:

$$\nabla^2 \Phi^{(0)} = 0, \tag{9. 2. 11}$$

and the function $\Phi^{(0)}$ is obtained to begin the limiting process as satisfying the Laplace equation. Since this is exactly the solution of the incompressible potential equation, we may say that the solution of the incompressible case or more generally the solution of the Laplace equation in Φ is just the first approximation to the solution of the compressible case. It is interesting to note that if $\Phi^{(0)}$ were taken in the form:

$$\Phi^{(0)} = Ax, \tag{9. 2. 12}$$

where A is a constant, and the above analysis applied for $\Phi^{(1)}$ equation (9. 2. 9) would become:

$$(a_0^2 - \tfrac{1}{2}[\gamma - 1] A^2) G = A^2 (\sum_n \Phi_{,xx}^{(n)}), \tag{9. 2. 13}$$

corresponding to the change in the term $\Phi_{,x}^{(0)}$ in equation (9. 2. 1). With slight manipulation in a manner previously used (i. e., associating with each nonlinear term in equation (9. 2. 2) a constant $\pi_{(m)}^{(1)}$) due to the fact that terms will now be introduced in equation (9. 2. 3) which are minus twice the corresponding nonlinear terms introduced in equation (9. 2. 1) by the change in $\Phi_{,x}^{(0)}$, a similar conclusion can be made as to the sum of the nonlinear terms resulting in the corresponding equation to (9. 2. 10). From equation (9. 2. 13) we can begin the limiting process by solving for $\Phi^{(1)}$ as follows:

$$(1 - B^2) \Phi_{,xx}^{(1)} + \Phi_{,yy}^{(1)} + \Phi_{,zz}^{(1)} = 0, \tag{9. 2. 14}$$

where B is a combination of the constants in equation (9. 2. 13) made equal to the Mach number M by suitable choice of the constants. Using equation (9. 2. 12) then we see that the first approximation to the solution of the compressible potential equation is an equation identical to that obtained from the small perturbation theory. Whether the first approximation is obtained from equations (9. 2. 11) or (9. 2. 13) the remainder of the analysis follows the same pattern illustrated now for the case when $\Phi^{(0)}$ is not given by equation (9. 2. 12) but determined from equation (9. 2. 11). Equation (9. 2. 10) when expanded contains linear terms in $\Phi^{(1)}$ since $\Phi^{(0)}$ has been obtained, nonlinear terms in $\Phi^{(1)}$ and terms in $\Phi^{(2,3,4,\ldots)}$. Introduce into this equation now, the scalar constant $\pi^{(1)}$, and in a similar manner to that used above, we can show that the expression for the nonlinear terms is zero. Selecting the resultant linearized equation in $\Phi^{(1)}$ as we did for $\Phi^{(0)}$ from equation (9. 2. 9) we can solve for $\Phi^{(1)}$. The resulting linearized equation for $\Phi^{(1)}$ has the general form:

$$\begin{aligned} a_1 \Phi_{,xx}^{(1)} + a_2 \Phi_{,xy}^{(1)} + a_3 \Phi_{,xz}^{(1)} + a_4 \Phi_{,yz}^{(1)} + a_5 \Phi_{,yy}^{(1)} + a_6 \Phi_{,zz}^{(1)} \\ + a_7 \Phi_{,x}^{(1)} + a_8 \Phi_{,y}^{(1)} + a_9 \Phi_{,z}^{(1)} = a_{10}, \end{aligned} \tag{9. 2. 15}$$

where $a_1, \ldots, a_{10}$ are known functions of (x, y, z) through $\Phi^{(0)}$. Repeating this process now with $\Phi^{(2)}, \Phi^{(3)}, \ldots$, we will obtain similar equations to (9. 2. 15) in these functions. The problem of solving the nonlinear potential equation has been reduced then with the aid of self-superposability to one of solving an infinite system of linear second order partial differential equations of the general form (9. 2. 15) provided that the series (9. 2. 1) converges to the proper value of Φ. The proof of this convergence is beyond the scope of the present work and is left for the analysis of particular cases. Note that the necessary link in the above analysis is the application of self-superposability to show that the expression for the sum of the nonlinear terms at each successive step is zero.

The symbol curl Ss denotes the curl of the vector which results from the self-superposability condition (see below).

10. 0 Reduction of the Previously Linearized Equations to Standard Form.

10. 1 *General Discussion.*

The analyses of this paper show that, in general, the equations obtained from the application of self-superposability can be separated into two distinct groups.

(a) A single linear partial differential equation or a system of such equations.

(b) A single nonlinear partial differential equation or a system of such equations. Each of these groups may be further subdivided into a subgroup of two parts, namely fully determined system with as many equations as unknowns and overspecified system where there are more equations than unknowns. The purpose of this chapter is to screen these analyses in order to summarize the above equations in some standard form. This is presented in the next section in Table VI. The nonlinear equations of group (b) above, for example those obtained in part (b) of Table III, Chapter 6 under techniques of solution, will not be presented since they are of little, if any, importance for the purposes of this part. It can be noted that nonlinear equations were obtained in previous analyses when the associated scalar function, $\pi(x, y, z, t)$, was removed via curl $Ss = 0$.

10. 2 *Reduction of the Previously Linearized Equations to Standard Form.*

All the analyses of this paper have been summarized in the following table. One can observe that frequently one equation or system of equations will apply to more than one of the physical cases investigated.

Table VI.

Standard form of the Linearized Equations of this Paper.

Equation	Physical Cases	Reference in Text
(1) $\nabla \times U_{i,t} = \nu \nabla \times U_{i,jj}$ must be solved for ψ when ν is a constant. This reduces to the standard form: $\partial/\partial t \nabla^2 \psi(x, y, t) = \nu \nabla^4 \psi(x, y, t)$. Letting $\nabla^2 \psi = \omega$ we obtain the standard heat conduction equation: $\partial\omega/\partial t = \nu \nabla^2 \omega$.	(1a) Incompressible Newtonian flow. (1b) Incompressible non-Newtonian flow. (1c) Incompressible Newtonian flow with electromagnetic phenomenon included.	(1a) Table III, Chapter 4, part (a) (1) under techniques of solution. (1b) Table IV, Chapter 5, part (a) (1) under techniques of solution. (1c) Table V, Chapter 8, part (a) (1).

Equation	Physical Cases	Reference in Text
(2) $\nabla \times U_{i,t} = R^{-1} \nabla \times U_{i,jj}$ must be solved for the vector function $U(x, y, z, t)$ where R is a parameter or "eigenvalue of the flow". In tensor form this equation becomes: $\varepsilon_{ijk} U_{j,kt} = R^{-1} \varepsilon_{ijk} U_{j,kmm}$, a linear 3rd order partial differential equation with constant coefficients in the vector U. The more standard general form is the following system of equations in the components of U: $F_j(x_1, x_2, x_3, x_4;\ u_1\, u_2, u_3; \cdots; \frac{\partial^{\alpha_0 + \cdots \alpha_n} u_j}{\partial x_1^{\alpha_0} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \cdots) = 0,\ n, j = 1, 2, 3.$	(2a) Compressible Newtonian flow. (2b) Compressible non-Newtonian flow. (2c) Compressible Newtonian flow with electromagnetic phenomenon included.	(2a) Equation (6. 2. 10), (2b) Equation (7. 2. 11), (2c) Equation (8. 3. 8).
(3) $F(x_1, x_2, x_3, x_4; \varrho; p_1, p_2, p_3, p_4) = 0$, $p_\varkappa = \partial\varrho/\partial x_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, 4$, first order linear partial differential equation with variable coefficients.	(3a) Same as (2a), (3b) Same as (2b), (3c) Same as (2c).	(3a) Equation (6. 1. 4), (3b) Equation (7. 1. 4), (3c) Equation (8. 1. 7), where $U(x, y, z, t)$ has been obtained from (2) above in each case.
(4) $F_j(x_1, x_2, x_3, x_4; h_1, h_2, h_3; p_1, \ldots, p_4) = 0$, $p_\varkappa = \partial h_i/\partial x_\varkappa$ $i, j = 1, 2, 3$, $\varkappa = 1, 2, 3, 4$. System of first order linear partial differential equations with variable coefficients.	(4) Incompressible Newtonian flow with electromagnetic phenomenon included.	(4) Equation (8. 2. 5).
(5) $\nabla^2 \Phi^{(0)}(x, y, z) = 0$.	(5) Steady, irrotational compressible flow with no external forces.	(5) Equation (9. 2. 11).
(6) $\Sigma A_{i\varkappa}(x_1, x_2, x_3)\, \partial^2 \Phi^{(n)}/\partial x_i \partial x_\varkappa + \Sigma A_i(x_1, x_2, x_3)\, \partial \Phi^{(n)}/\partial x_i = f(x_1, x_2, x_3)$, $\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3)$, $i, \varkappa = 1, 2, 3$; $n = 1, 2, 3, \ldots$. Second order linear partial differential equation with variable coefficients.	(6) Same as (5).	(6) Equation (9. 2. 15).
(7) The following overspecified system must be solved for the vector function $U(x, y, z, t)$. $U_{i,i} = 0$, $\varepsilon_{ijk} U_{j,kt} = \nu \varepsilon_{ijk} U_{j,kmm}$.	(7a) Same as (1a), (7b) Same as (1b), (7c) Same as (1c).	(7a) Same as (1a) except part (a) (2). (7b) Same as (1b) except part (a) (2). (7c) Same as (1c) except part (a) (2).
(8) Overspecified system in $T(x,y,z,t)$: $T_{,t} + a_{1,j} T_{,j} = a_2 + A(T_{,t} + a_3 T + a_{1,j} T_{,j} + a_4 T) + B(T_{,kk} + a_{5,j} T_{,j})$, and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n T^n = a_6$; $a_1, \ldots, a_6, b_n$ are known functions of (x, y, z, t), A and B constants.	(8) Compressible Newtonian flow.	(8) Equations (6. 2. 16), (6. 2. 17).

Equation	Physical Cases	Reference in Text
(9) Overspecified system in $T(x, y, z, t)$: Same equations as (8) plus: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n = a_7$, $\sum_{n=0}^{\infty} d_n T^n = a_8$, $\sum_{n=0}^{\infty} e_n T^n = a_9$, where $a_1, \ldots, a_9$, b_n, c_n, d_n, e_n are known functions of (x, y, z, t), A, B are constants and as in (8) tensor notation is used in the first equation.	(9) Compressible non-Newtonian flow.	(9) Equations (7. 1. 2), (7. 2. 13), (7. 2. 14).
(10) $F_i[x, y, z, t;\ \varrho(x, y, z, t);\ T(x, y, z, t);\ R] = 0$, $i = 1, 2$ must be solved simultaneously for the functions ϱ and T with $R =$ constant as an "eigenvalue".	(10) Compressible Newtonian fluid.	(10) Equations (6. 2. 21) and (6. 2. 22).
(11) $F_1[x, y, z, t;\ \varrho(x, y, z, t);\ T(x, y, z, t);\ R] = 0$; $F_2[x, y, z, t;\ \varrho(x, y, z, t);\ T(x, y, z, t),\ R, R_1, R_2, R_3] = 0$ must be solved simultaneously for ϱ and T with R, R_1, R_2, R_3, (all four are constants) as "eigenvalues".	(11) Compressible non-Newtonian fluid.	(11) Equations (7. 2. 18) and (7. 2. 19).

From this table, we can see that for certain cases tabulated for incompressible flow, namely when the stream function cannot be introduced, an overspecified system is obtained for U and the energy equation uniquely determines T when self-superposability is applied. For compressible flow it was necessary to utilize the Reynold's number, R, as a parameter or "eigenvalue" with the result that we obtained a single equation determining U and in some cases an overspecified system for T.

Equation (9. 2. 14) can be transformed to the standard Laplace equation included in Table VI by the following affine transformation:

$$x' = x,\ y' = \mu y,\ z' = \mu z;\ \mu = (1 - B^2)^{1/2}.$$

It must be noted that sufficient regularity has been assumed in appendix A for the functions in question to insure the application of the standard existence and uniqueness theorems of classical analysis of partial differential equations. We will not, however, go into a detailed investigation of these theorems and their application to the equations of Table VI.

In this chapter we have discussed the reduction to standard form of the resultant linearized equations of motion. It must be noted that the required compatibility condition, namely curl $Ss = 0$, must be added to the equations and systems given in the above table. Each system will be course become overspecified by one degree more. To illustrate, this condition becomes for case (1) of table VI:

$$D(\psi, \nabla^2\psi)/D(x, y) = 0.$$

11. 0 The Boundary Value Problem.

11. 1 *General Discussion.*

Too often in investigations we are satisfied if we can obtain the fundamental solution to the differential system describing a particular physical problem. Frequently, of course, this is all that can be expected. It is certainly more than desireous, if possible, to consider the boundary value problem in any such analysis. It will be the purpose of this chapter to describe the classical boundary value problems which are available in the literature for the standard linear equations of non-overspecified systems presented in Table VI of the preceding chapter which are associated with the original nonlinear equations of motion. We will not, however, consider the problem of proving that the solutions of the various boundary value problems which can be solved for the given linear equations are solutions of the associated nonlinear equations although this is clearly the underlying thought of this chapter.

The problem arising from the consideration of a differential system with the corresponding boundary value problem is to find, from the entire class of solutions of the differential system the solution or solutions which satisfy certain additional conditions. Since the boundary value problem generally arises from physical considerations, certain properties are expected of the solution:

(1) existence of a solution; oversufficient conditions should not be applied as they may be incompatible and no solution will be found. Existence of a solution may not always be assumed by physical intuition;

(2) uniqueness of the solution; sufficient conditions should be provided to determine the solution uniquely;

(3) the solution should depend continuously on the data; this is necessary for a physical problem as the boundary and boundary values can be ascertained only within a small latitude of variation (the so-called "natural" problems).

The general procedure of treating the boundary value problem is obtained from the theory of partial differential equations. Let us briefly discuss these possibilities.

To systems of first order equations, one may refer the problem of Cauchy or initial value problem (one curve). Theorems concerning these problems are very well known and are available in the works of Hadamard [25], Goursat [24], and Bernstein [9] to name a few.

The boundary conditions by means of which one can determine a unique solution of the partial differential equation of the second order are of different character, depending upon the type of equation: elliptic, hyperbolic, or parabolic. The classical theorem of Cauchy-Kowalewsky attempts to introduce a certain uniformity in the approach to the solution of such equations provided all the functions in question are analytic.

Let us exclude from our consideration the parabolic type equation as being completely exceptional although some investigations on the subject are available in the bibliography of this paper. A classical paper on the parabolic type equation is that of Holmgren [27]. In general, for the hyperbolic type equation a general solution to the special Cauchy problem can be obtained on a characteristic band assuming analyticity of the data from a convergent Taylor series representation for the solution. Holmgren considered the heat equation $U_{,xx} - U_{,yy} = 0$. For this case, he showed that a necessary additional condition must be imposed on the special Cauchy data which he determined to insure convergence of the Taylor series. Regarding the elliptic type the date may generally be expressed in one of three standard forms:

(1) on a closed boundary S the value of the function U is specified (the boundary value problem of first kind or that of Dirichlet);

(2) on a closed boundary S the value of $\frac{\partial U}{\partial n}$ (or any of the first partial derivatives) is specified (the boundary value problem of the second kind or that of Neumann);

(3) "mixed" boundary value problem, i. e.; choosing U on one part of S and its first partial derivative on another part of S [21].

In some problems one can consider a certain linear combination of the two above data.

The second order partial differential equations of the "normal" hyperbolic type fulfill exactly the theorem of Cauchy-Kowalewsky. On an open curve (initial curve) which may be finite, the values of U and $\frac{\partial U}{\partial n}$ are specified. This is the Cauchy problem. Generally, there are two curves joining the initial curve, going up to infinity, on which either U or $\frac{\partial U}{\partial n}$ are given (boundary curves). Hadamard mentioned that for the non-normal hyperbolic type no solution of the type mentioned above ("correctly set") is known. It is of importance to notice that in general the elliptic type of equation usually does not admit the given data in the form of Cauchy which are fully admissible for the hyperbolic type. Conversely, in the latter case, it is of disadvantage to assume a closed curve which is convenient for the elliptic type. There are available in the literature many particular investigations of the various types of second order and, for that matter, higher order equations for sundry special boundary or initial conditions. A typical example of this is Bernstein's book which summarizes many second and higher order analyses available in the literature. The very difficult problem of having a given region part elliptic and part hyperbolic has even been considered.

The higher order equations "totally" elliptic (all the characteristic directions are imaginary) usually involve the following data: U and $\frac{\partial U}{\partial n}$ are specified along a closed curve or on a closed surface (Hilbert, E. E. Levi, Fredholm). The "totally" hyperbolic equations (all the characteristic directions are real) have been solved by Holmgren by the Riemann method. The Cauchy-Kowalewsky theorem has been extended to higher order equations (reference Bernstein, section 56 [9]) but is again valid only when the functions involved are analytic.

The high points of the available literature on boundary value problems which are of interest in this work have been given in the above brief resume. Various additional particular problems have been considered under sundry conditions and for different equations. Bernstein has an excellent collection of such examples along with a fine synopsis of the available literature (including an excellent bibliography) on the subject and on existence theorems in partial differential equations.

11. 2 *Remarks on the linear Equations of Table VI, Chapter* 10.

The problem of solving the various nonlinear partial differential equations of this paper has been reduced in some cases to the problem of solving the linear equations presented in Table VI by the application of the concept of self-superposability. From the discussion of the preceding section, we now proceed to point out which of the classical boundary value problems can be solved for these linear equations.

Equations (3) and (4) of Table VI are of first order. The Cauchy problem and initial value problem for a first order equation or system of such equations have been investigated thoroughly in the literature as was noted in the previous section.

The Laplace equation, equation (5) of Table VI, is of course well known in the literature. Similarly, equation (1) reduces to the problem of solving the well-known heat conduction equation and subsequently the Poisson equation both of which have been treated in the literature from the standpoint of the boundary value problem.

Equation (6) of Table VI is a linear second order partial differential equation with variable coefficients. Because the functions A and f are unspecified in form, it may be of either of the standard types: elliptic, hyperbolic or parabolic depending on a more detailed investigation to determine these functions. This problem has been discussed in general in the preceding section and a brief sketch of the available literature indicated for the possible forms of the second order equation.

Equation (2) of Table VI is a system of three third order linear partial differential equations with constant coefficients. The fact that the coefficients are constant increases the simplicity of the problem immeasureably. A brief resume of the available literature for this problem is given in the previous section where one might note for this equation (in particular Bernstein's book. section 60). The discussion of this chapter refers to the linear equations summarized in Table VI, where once again the nonlinear equation given by curl $Ss = 0$ has been omitted.

12. 0 Overspecified Systems.

12. 1 *Present Status of the Literature on Overspecified Systems.*

Due to the lack of any standard terminology in the literature on this subject, the following will be used in this paper: By an overspecified system of equations we mean that there are more equations than unknowns (for such a system of algebraic equations the standard nomenclature would be redundant or overdetermined). In the way of further subdivision a system of $n + 1$ equations in n unknowns is singly overspecified (frequently referred to as just overspecified in the earlier part of this paper for brevity), $n + 2$ equations in n unknowns is doubly overspecified and $n + m$ equations ($m > 2$) in n unknowns is m-multiply overspecified.

The severe complexities of such a problem are immediately obvious. In general one must consider the following questions:

(1) When is an overspecified system capable of a solution.

(2) How many arbitrary parameters (constants) or functions (of integration) this "general solution" depends on.

(3) What additional conditions are necessary to obtain a unique solution.

Let us consider first the simplest possible system of r equations in a single unknown z [1]):

$$F^{\nu}(x_1, \ldots, x_n, z, z_{,x_1}, \ldots, z_{,x_n}) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, r;\ r < n). \tag{12. 1. 1}$$

A necessary condition that there exists a solution $z = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ of class A^2 (f is said to be of class A^m in R if f and all its partial derivatives up to and including those of order m are continuous in R) is that

$$\psi_{,x_i x_j} \equiv \psi_{,x_j x_i}, \tag{12. 1. 2}$$

[1]) *J. M. Thomas* [54—64] has been actively engaged in the consideration of such systems along with the more general problem later described. A list of his contributions is available in the bibliography.

which implies that:

$$(12.1.3)\qquad \sum_{j=1}^{n} \{[F^{\mu}_{x_j} + p_j F^{\mu}_{z}] F^{\nu}_{p_j} - [F^{\nu}_{x_j} + p_j F^{\nu}_{z}] F^{\mu}_{p_j}\} = 0,$$

identically in $(x_1, \ldots, x_n)$ when $z = \psi$, $p_i = \psi_{x_i}$. If, given $F^{\nu}(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$, condition (12. 1. 3) is satisfied, identically in x_i, z, p_i, then equation (12. 1. 1) is called either an involutory, completely integrable or passive system. Equation (12. 1. 3) is called the set of integrability conditions and the left side is often abbreviated in the literature by: $[F^{\nu}, F^{\mu}]$.

Frequently, equation (12. 1. 1) is put into the so-called normal form as follows: If in the system $F^{\nu}(x_i, z, p_i) = 0$ the variables x_i $(i = 1, \ldots, r)$ can be expressed explicitly in terms of the other variables and their derivatives it is customary to denote these by $x_1, \ldots, x_r$ and the remaining variables $x_{r+1}, \ldots, x_n$ by $y_1, \ldots, y_m$ $(m = n - r)$. The normal form of (12. 1. 1) is then given as follows:

$$(12.1.4)\qquad z_{,x_\varkappa} = f^{\varkappa}(x_1, \ldots, x_r;\ y_1, \ldots, y_m;\ z;\ z_{,y_1}, \ldots, z_{,y_m}),\ \varkappa = 1, \ldots, r.$$

The system is completely integrable, when $f^{\varkappa}(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_m, z, q_1, \ldots, q_m)$ satisfies the identities:

$$(12.1.5)\qquad (f^{\varkappa}_{x_i} + f^{\varkappa}_{z} \cdot f^{i}) - (f^{i}_{x_\varkappa} + f^{i}_{z} \cdot f^{\varkappa}) + \sum_{h=1}^{m} [f^{\varkappa}_{q_h}(f^{i}_{y_h} + f^{i}_{z} \cdot q_h) - f^{i}_{q_h}(f^{\varkappa}_{y_h} + f^{\varkappa}_{z} \cdot q_h)] \equiv 0,$$

$$(i, \varkappa = 1, \ldots, r).$$

With the above definitions in mind, theorems are available for the case where the usual conditions of analyticity are preserved and then when the functions are of any class A^m in the works of such authors as Goursat, J. M. Thomas, T. Y. Thomas and E. Titt, Germay, Kamke, Bieberbach, Caratheodory, Ritt, Saltykow and Engel-Faber. A very informative resume of the more important theorems is available in Bernstein, section 20.

The general problem of investigating a system of m partial differential equations in n independent variables and r unknown functions:

$$(12.1.6)\qquad F^{\varkappa}\left(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots z_r, \ldots, \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} z_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \ldots\right) = 0,$$

has been considered by Riquier, Janet, J. M. Thomas, T. Y. Thomas and E. Titt and others. In general, what is done is to determine conditions under which the given system can be reduced to yield an "orthonomic" system, and then conditions under which the successive differentiation of the "principal derivatives" will yield the same expression, regardless of the order of differentiation. Janet (p. 23) for example discusses a regular procedure by which, after a finite number of operations, either the impossibility of the solution of the proposed system is shown, or else one is lead to a canonical form for which one knows a precise existence theorem. Only analytic initial data along with analytic functions are considered for the equations in addition to the fact that only local analytic solutions are obtained. The presentation of more detail on the subject in question is beyond the scope of the present work.

Aside from the analysis of Thomas and Titt, previously mentioned, where the problem of Cauchy was considered for the general quasi-linear overspecified system and several theorems in Bernstein on first order system which consider the initial value problem very little was done by the majority of the authors in the way of considering the boundary value problem for overspecified systems. It is significant to note that only part of the subject of overspecified systems available in the literature which is of direct interest in this work has been considered in the above summary.

12. 2 *Application of the Discussion of the Preceding Section to the Overspecified Systems of this Paper.*

It must be noted that only the linear overspecified systems obtained in this paper which are presented in Table VI, Chapter 10 will be considered. For equation (8) of this table it will be recalled that the algebraic condition can be converted to a first order differential condition as was noted in section 6. 2. In addition, for practical applications μ can be given by a polynomial in T such that this first order differential condition has a finite number of terms. The overspecified system then consists of two first order linear equations in the unknown T. The theorems mentioned at the outset of the preceding section can then be used to give the necessary information as to the solution of this system. Although further investigation of this problem with regard to carrying out the application of the proper theorem to our system would be desireable it will not be attempted in this paper.

In a similar manner to the above discussion, equation (9) of Table VI reduces to an overspecified system of five first order linear equations in the one unknown T which may be handled by the same theorems and a similar discussion follows.

The remaining overspecified system of linear equations is given by (7) of Table VI which is essentially four equations in the three unknown velocity components u, v and w. Three of the equations are third order with constant coefficients and the fourth is a first order equation with constant coefficients. This system, being linear, is nicely handled by the more general theorems discussed in the latter part of the preceding section.

Once again, although the problem is now clear, namely, the theorem is now made available by which we can investigate the nature of the solution of this overspecified system, we will not carry on any further at this time but will satisfy ourselves by merely indicating the proper direction to be taken.

13. 0 Several Applications of the Results of this Paper.

13. 1 *An Illustrative Construction Using the Self-Superposability Condition.*

Consider the case of a two dimensional, steady, incompressible, viscous, Newtonian flow. Applying the concept of self-superposability the problem reduces to that of solving the biharmonic equation for ψ (reference equation (1), Table VI, Chapter 10), i. e.,

$$\nabla^4 \psi = 0. \tag{13. 1. 1}$$

Ergun applied his definition of self-superposability to reduce the problem to that of Kampé de Fériet. Refer now to one of the basic equations in the analysis of Kampé de Fériet given by:

$$\nu \nabla^2 \omega = \omega_{,t} + \psi_{,y} \cdot \omega_{,x} - \psi_{,x} \cdot \omega_{,y} = \omega_{,t} + \frac{D(\omega, \psi)}{D(x, y)}, \tag{13. 1. 2}$$

where ω is the vorticity normal to the plane of motion given by:

$$\omega = \tfrac{1}{2}(v_{,x} - u_{,y}). \tag{13. 1. 3}$$

Introducing the stream function in the customary manner equation (13. 1. 3) becomes:

$$\omega = \tfrac{1}{2}(-\psi_{,xx} - \psi_{,yy}) = -\tfrac{1}{2}\nabla^2 \psi. \tag{13. 1. 4}$$

For steady motion equation (13. 1. 2) can now be written as follows:

$$\nu \nabla^4 \psi = -2 \frac{D(\omega, \psi)}{D(x, y)}. \tag{13. 1. 5}$$

Since $\nu \neq 0$ imposing the condition of equation (13. 1. 1) implies the required condition curl $Ss = 0$ (Chapter 4):

$$\frac{D(\omega, \psi)}{D(x, y)} = 0, \quad \psi = f(\omega). \tag{13. 1. 6}$$

The application of self-superposability resulting in the biharmonic equation in ψ is therefore equivalent to the necessary and sufficient condition of the vanishing of the nonlinear terms in the equation of motion given by Kampé de Fériet as having a constant vorticity along the streamline. This discussion can be derived from the analysis of Ergun [17]. It is interesting to note that if the stream function of a Ss flow satisfies a biharmonic equation the condition that $\psi = f(\omega)$ is automatically implied. In a similar manner, for nonsteady motion the resultant linear equation again obtained from equation (1), Table VI, Chapter 10 is given by:

$$\partial/\partial t \nabla^2 \psi = \nu \nabla^4 \psi. \tag{13. 1. 7}$$

Applying equation (13. 1. 4) to equation (13. 1. 2) we obtain:

$$\nu \nabla^4 \psi - \partial/\partial t \nabla^2 \psi = -2 \frac{D(\omega, \psi)}{D(x, y)}. \tag{13. 1. 8}$$

Equation (13. 1. 7) implies therefore that:

$$\frac{D(\omega, \psi)}{D(x, y)} = 0, \quad \psi = f(\omega), \tag{13. 1. 9}$$

such that the application of self-superposability in the nonsteady case results once again in the condition of Kampé de Fériet. Should ψ therefore satisfy equation (13. 1. 7), which is obtained via the application of self-superposability, the condition that $\psi = f(\omega)$ is automatically implied.

The above reasoning can be seen in yet another way. Equation (13. 1. 7) was obtained by taking the curl of the linearized equation of motion which accounted for the vanishing of the term $\pi_{,i}$. The self-superposability equation is given by:

$$\pi_{,i} = -2 U_j U_{i,j}, \tag{13. 1. 10}$$

or utilizing the continuity condition in a manner similar to that of section 3. 1:

$$-\tfrac{1}{2} \pi_{,i} = (U_i U_j)_{,j}. \tag{13. 1. 11}$$

π being a scalar quantity taking the curl of equation (13. 1. 10) or (13. 1. 11) requires that the equation vanishes identically. It can be shown quite easily that:

$$-\tfrac{1}{2} \nabla \times \pi_{,i} = 0 = \nabla \times (U_j U_{i,j}) = \nabla \times (U_i U_j)_{,j} = \frac{D(\omega, \psi)}{D(x, y)}, \tag{13. 1. 12}$$

such that the application of self-superposability reduces to the condition $\psi = f(\omega)$ and to the analysis of Kampé de Fériet. This was observed in a slightly different manner on pp. 91—92 of Ergun's paper [17]. It may be noted that the condition discussed in Appendix A given by equation (A. 7) reduces in the case of two dimensional self-superposable flow to:

$$u\omega_{,x} + v\omega_{,y} = 0 = \frac{D(\omega, \psi)}{D(x, y)}. \tag{13. 1. 13}$$

As the number of papers following Ballabh's initial work in superposability increased in number with various analyses constructing superposable and self-superposable motions so now is the way opened for such constructions based on the analyses and definitions of this paper. It will not be our purpose to proceed in this manner at this time although it

is clear how such constructions can be obtained. This is particularly significant for the cases not previously considered where ψ cannot be introduced provided that the problem of solving an overspecified system required by the analysis of this paper can be resolved in any particular case by the discussion of Chapter 12.

13. 2 *A Physical Application of Self-Superposability.*

Consider the physical case outlined at the outset of the preceding section referred to the problem of the ordinary boundary layer of thickness $\delta(x)$. Upon applying the concept of self-superposability the following linearized equation is obtained:

$$\nabla^4 \psi(x, y) \equiv \psi_{,xxxx} + 2\,\psi_{,xxyy} + \psi_{,yyyy} = 0. \tag{13. 2. 1}$$

Apply now the following transformation:

$$\{x, y\} \to \{s(x, y),\ \eta(x, y)\}. \tag{13. 2. 2}$$

$$\psi = \psi(x, y). \tag{13. 2. 3}$$

$$d\psi = \psi_{,x} dx + \psi_{,y} dy. \tag{13. 2. 4}$$

$$\psi_{,s} = \psi_{,x} x_{,s} + \psi_{,y} y_{,s}. \tag{13. 2. 5}$$

$$\psi_{,\eta} = \psi_{,x} x_{,\eta} + \psi_{,y} y_{,\eta}. \tag{13. 2. 6}$$

Solving equations (13. 2. 5) and (13. 2. 6) for $\psi_{,x}$ and $\psi_{,y}$ we obtain:

$$\psi_{,x} = J^{-1}(\psi_{,s} y_{,\eta} - \psi_{,\eta} y_{,s}), \tag{13. 2. 7}$$

$$\psi_{,y} = J^{-1}(\psi_{,\eta} x_{,s} - \psi_{,s} x_{,\eta}), \tag{13. 2. 8}$$

where the Jacobian of the transformation, J, is given by:

$$J = x_{,s} y_{,\eta} - x_{,\eta} y_{,s} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, \eta)}. \tag{13. 2. 9}$$

Let us specify the following form for the above transformation:

$$s(x, y) = x,\ \eta(x, y) = y\delta^{-1}(x);\ x(s, \eta) = s,\ y(s, \eta) = \eta\delta(s). \tag{13. 2. 10, 11}$$

$$x_{,s} = 1,\ x_{,\eta} = 0,\ y_{,s} = \eta\,\frac{d\delta(s)}{ds} = \eta\delta',\ y_{,\eta} = \delta(s). \tag{13. 2. 12}$$

Equations (13. 2. 7) and (13. 2. 8) become:

$$\psi_{,x} = \psi_{,s} - \psi_{,\eta}\,\eta\,\delta'\,\delta^{-1}, \tag{13. 2. 13}$$

$$\psi_{,y} = \delta^{-1}\psi_{,\eta}, \tag{13. 2. 14}$$

where the Jacobian is now given by:

$$J = \delta(s). \tag{13. 2. 15}$$

The Jacobian of the transformation is just the thickness of the boundary layer, $\delta(s)$, in the (s, η) plane. Taking the origin of the (s, η) coordinate system at the leading edge of the body will result in $\delta(s)$ vanishing at this point. Keeping outside an ε-neighbourhood ($\varepsilon > 0$, arbitrarily small) of the origin would therefore imply that $J \neq 0$. Equation (13. 2. 1) now becomes in terms of $\psi(s, \eta)$:

$$F(s, \eta;\ \psi;\ \psi_{,\eta},\ \psi_{,s\eta},\ \psi_{,\eta\eta},\ \psi_{,\eta\eta\eta},\ \psi_{,s\eta\eta},\ \psi_{,ss\eta},\ \psi_{,\eta\eta\eta\eta},\ \psi_{,s\eta\eta\eta},\ \psi_{,ss\eta\eta},\ \psi_{,sss\eta},\ \psi_{,ssss}) + \psi_{,\eta\eta\eta\eta} = 0, \tag{13. 2. 16}$$

where the function F is linear in the given derivatives and its coefficients are dependent upon η and the derivatives of $\delta(s)$ with respect to s with the exception of the term $\psi_{,ssss}$ which has the coefficient $\delta^4(s)$. Consider the class of solutions of the equation derived from

equation (13. 2. 16) obtained by specifying $\psi = \psi(s, \eta) = \psi(\eta)$ only, i. e., keeping s as a universal parameter. This assumption corresponds to the assumption of similar velocity profiles in the boundary layer (the so-called affine solutions) used by Prandtl, Blasius, Pohlhausen, etc., or for that matter, to all proposed solutions utilizing the transformation $\{x, y\} \to \{\eta(x, y)\}$. With s fixed as a constant parameter all partial derivatives of ψ and δ with respect to s vanish. Equation (13. 2. 16) reduces to:

$$\frac{d^4 \psi(\eta)}{d\eta^4} = 0. \tag{13. 2. 17}$$

Since ψ is an analytic function of η, equation (13. 2. 17) implies in general:

$$\frac{d^n \psi(\eta)}{d\eta^n} = 0, \tag{13. 2. 18}$$

or in particular:

$$\frac{d^6 \psi(\eta)}{d\eta^6} = 0. \tag{13. 2. 19}$$

Integrating equation (13. 2. 19) with respect to η we obtain:

$$\psi = \delta(s)\,(a\eta^5 + b\eta^4 + c\eta^3 + d\eta^2 + e\eta + f), \tag{13. 2. 20}$$

where $\delta(s)$, being a constant, is introduced so as to insure the desired form for the velocity component which follows. Since η is nondimensional introduce in the (s, η) plane the nondimensional velocity such that from equation (13. 2. 14) we have:

$$u(\eta)\, U^{-1} = \psi_{,y} = \delta^{-1}(s)\, \psi_{,\eta} = a\eta^4 + b\eta^3 + c\eta^2 + d\eta + e, \tag{13. 2. 21}$$

or in general ψ is given by a polynomial in η. Equation (13. 2. 21) is exactly Pohlhausen's proposition for the solution to the boundary layer. Pohlhausen, guided by intuition, proposed his classical solution to the boundary layer which is derived above as being contained in the general class of self-superposable solutions. It is important to note at this point the following significant observations. The purpose of this section is to deduce Pohlhausen's assumption from the application of self-superposability to the two-dimensional, steady boundary layer equations. As was previously stated, the very basic assumption of similar profiles was utilized by Pohlhausen. In his proposed engineering solution many mathematical questions were either ignored or neglected, a fact which has been observed in the papers of v. Krzywoblocki. The mathematical question which follows will illustrate this difficulty. For fixed values of s, say s_1 and s_2, equation (13. 2. 21) provides the respective variations of uU^{-1} with η in the boundary layer. Although the division between s_1 and s_2 can be taken as small as desired the conventional limiting process required to show continuity cannot be applied due to the vanishing of the Jacobian of the transformation. The vanishing of the Jacobian will be discussed later in this section. What this means is the following. For a given value of s, equation (13. 2. 21) describes uU^{-1} as a continuous of η through the boundary layer. Do the discreet curves of uU^{-1} vs. η for various values of s make up a surface, or in particular an integral surface of the given differential equation? The standard techniques of analysis cannot be applied to investigate this question. This particular observation can be approached in yet another way. The condition $\partial\psi(s, \eta)/\partial s = 0$ implies that ψ attains an extremum for each fixed value of s. We might suspect that the envelope of these extremum is the desired continuous integral surface but once again the necessary tools are not available to prove this. It has been suggested by Whyburn and v. Krzywoblocki that future developments of topology might at some time afford the necessary tools to prove this point.

When s is taken as a constant parameter the transformation $\{x, y\} \to \{s, \eta\}$ reduces the number of independent variables by one. It is easily seen from equation (13. 2. 9) that as a result the Jacobian vanishes. With the resultant failure of classical function theory v. Krzywoblocki considered the problem of differential equations with a parameter. In addition, Morgan [38] has considered the application of algebraic concepts to the problem. A brief resume of the latter's work follows. It is to be noted that Morgan's analysis cannot be applied to the boundary value problem. This is due to the fact that algebraic concepts cannot be utilized when considering boundary conditions. As such only fundamental solutions are to be considered.

Morgan, motivated by the work of Birkhoff, developed a method whereby the number of independent variables of some partial differential equations can be reduced by one. The substance of this method is contained in the following statement. Let $\Phi_\delta = 0$ $(\delta = 1, \ldots, n)$ be a system of arbitrary partial differential equations. Let G_1 be an arbitrary continuous one-parameter group of transformations, of a form specified in the latter part of Morgan's paper, of the dependent and independent variables of the equations $\Phi_\delta = 0$. It is shown that, if each of the equations $\Phi_\delta = 0$ is invariant under G_1, then the number of its independent variables can be reduced by one. A system of k-th order partial differential equations $\Phi_\delta = 0$ is invariant under a continuous one-parameter group of transformations G_1 if each of the k-th order differential forms Φ_δ is conformally invariant under the transformations of $G_1^{E_k}$. Morgan applied his method to two examples, one in classical elasticity and the other in fluid dynamics.

The following plausible geometric interpretation can be given to illustrate Morgan's analysis. Using the concept of invariant groups Morgan was able to reduce the number of independent variables of some partial differential equations by one under certain conditions. Consider the following second order partial differential equation:

$$F(x, y;\ u;\ u_{,x},\ u_{,y},\ u_{,xx},\ u_{,yy},\ u_{,xy}) = 0.$$

(This geometric interpretation could easily be extended to n independent variables). The solution of this equation would be given by $u = u(x, y)$ which represents an integral surface in the x, y, u space. Using algebraic concepts to reduce the number of independent variables in the original equation by one can be likened to saying, for example, that this integral surface is of a special nature, namely a cylindrical surface. Consequently the solutions can be given by a plane curve obtained by the intersection of a plane perpendicular to the generatrices of the cylindrical surface with the surface itself. In the sample application of his method to the Blasius equation Morgan succeeded in reducing rigorously the number of independent variables by one. This then associated with the original partial differential equation an ordinary differential equation and, by the above discussion, resulted in a continuous plane curve solution. The parabolic velocity distribution and assumption of similar profiles is consequently justified without considering of course the corresponding boundary value problem for which case the algebraic concepts cannot be applied.

In attempting to deduce Pohlhausen's assumption from the application of self-superposability it was necessary to fix s in the transformation as a constant parameter. This resulted in the vanishing of the Jacobian and the resultant necessity of leaving function theory. We were able to reproduce Pohlhausen's assumption for a fixed value s but, as previously noted, could not show the required continuity of the integral surface. Morgan considered the biharmonic equation and succeeded in applying his method to reduce the number of independent variables by one under the condition, however, that

$\eta = yx^{-1}$. Consequently we can justify fully our analysis giving a continuous integral surface only if we take $\delta(x) = x$. At the present time, this is of little physical use since it implies a linear velocity distribution in the boundary layer. It is an open question whether it might be possible to select a different invariant group than Morgan used and obtain a different form of the function $\delta(x)$ which might have better physical meaning. In addition there is the thought that in certain physical cases the linear distribution may be more near correct than the standard parabolic variation (so-called laminar sublayer).

It is interesting to observe what is happening with the self-superposability condition throughout the above analysis. The self-superposability condition is given as follows:

$$-\tfrac{1}{2}\pi_{,i} = U_j U_{i,j}. \tag{13. 2. 22}$$

This reduces to the following two equations in the case in question:

$$-\tfrac{1}{2}\pi_{,x} = uu_{,x} + vu_{,y} = \psi_{,y}\psi_{,xy} - \psi_{,x}\psi_{,yy}, \tag{13. 2. 23}$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi_{,y} = uv_{,x} + vv_{,y} = \psi_{,x}\psi_{,xy} - \psi_{,y}\psi_{,xx}. \tag{13. 2. 24}$$

Applying the transformation $\{x, y\} \to \{s, \eta\}$ used above with s taken as a constant parameter equations (13. 2. 23) and (13. 2. 24) become in the (s, η) plane respectively:

$$0 \equiv 0, \tag{13. 2. 25}$$

$$\pi_{,\eta} = 0;\ \pi = \text{const}. \tag{13. 2. 26}$$

In the (s, η) plane with s assumed to be a constant parameter the nonlinear terms in the equation of motion can be replaced by the gradient of a scalar constant which identically satisfies the self-superposability condition.

13. 3 *A Second Application of Self-Superposability.*

Once again considering the physical case outlined at the outset of section 13. 1 the following equation is obtained upon applying self-superposability:

$$\nabla^4 \psi(x, y) = 0. \tag{13. 3. 1}$$

One might recall that Blasius applied the following transformation or separation of variables to the simplified Prandtl boundary layer equations:

$$\eta = \tfrac{1}{2}\, yU^{1/2}(\nu x)^{-1/2}, \qquad \psi = (\nu U x)^{1/2} f(\eta), \tag{13. 3. 2}$$

where U is the free stream velocity and ν the coefficient of viscosity used for non-dimensionalizing purposes. As a result, Blasius obtained the following nonlinear ordinary differential equation:

$$f''' + ff'' = 0, \tag{13. 3. 3}$$

where the primes indicate differentiation with respect to η. He solved this equation by means of a power series. It is interesting to note that some difficulty has been noted in the literature concerning the convergence of the power series solution to equation (13. 3. 3).

A most important aspect of the Blasius transformation is the adherence to the parabolic velocity distribution in the boundary layer as observed by test via the assumption that $\eta \sim yx^{-1/2}$. In attempting to apply equations (13. 3. 2) to equation (13. 3. 1) we were not so fortunate as Blasius, for the resultant equation in f has coefficients which are functions of x as well as η. Seeking a separation of variables which would work we began with the equations: $\eta = ay\alpha(x)$, $\psi = b\beta(x) f(\eta)$ and succeeded in determining:

$\alpha(x) = x^{-1}$, $\beta(x) = x^4$. Applying this to equation (13. 3. 1), we obtain the following linear ordinary differential equation in η:

$$Af'''' + Bf''' + Cf'' + Df' + Ef = 0, \tag{13. 3. 4}$$

where the coefficients are polynomials in η. The significant physical implication of a parabolic velocity distribution is replaced by a linear distribution. This separation of variables is exactly the one treated by Morgan in his application to classical elasticity mentioned in the preceding section. Solutions of equation (13. 3. 4) would then be self-superposable solutions to the boundary layer. Equation (13. 3. 4) being a linear equation in f should be easier to deal with in all respects than the Blasius equation given by equation (13. 3. 3). As was noted in the preceding section, the assumption that $\eta = yx^{-1}$ implies a linear velocity distribution in the boundary layer which may have limited physical application.

13. 4. *Complete Systems.*

The complete overspecified system of section 13. 2 is given by:

$$\nabla^4 \psi(x, y) = 0; \quad D(\psi, \nabla^2 \psi)/D(x, y) = 0. \tag{13. 4. 1}$$

Applying the standard boundary layer substitution:

$$\eta = ay\delta^{-1}(s); \quad \psi = b\delta(s)\, f(\eta); \quad a, b = \text{constants}, \tag{13. 4. 2}$$

keeping in mind the definitions and transformation of Section 13. 2, equations (13. 4. 1) become:

$$\begin{aligned} \delta^{(\mathrm{IV})}(f - \eta f') &+ \eta^2 f''(4\delta'\delta'''\delta^{-1} + 3\delta''^2\delta^{-1} - 18\delta'^2\delta''\delta^{-2} + 12\delta'^4\delta^{-3}) \\ &+ 2(2\delta'^2\delta^{-3} - \delta''\delta^{-2})\, f'' + \eta^3 f'''(-6\delta'^2\delta''\delta^{-2} + 8\delta'^4\delta^{-3}) \\ &+ 2\eta f'''(4\delta'^2\delta^{-3} - \delta''\delta^{-2}) + \eta^4 f^{(\mathrm{IV})}\delta'^4\delta^{-3} \\ &+ 2\eta^2\delta'^2\delta^{-3} f^{(\mathrm{IV})} + \delta^{-3} f^{(\mathrm{IV})} = 0; \end{aligned} \tag{13. 4. 3a}$$

$$\begin{aligned} \delta'''(ff' - \eta f'^2) &- \eta ff''(2\delta'^3\delta^{-2} - \delta'\delta''\delta^{-1}) \\ &+ \eta^2 f'f''(2\delta'\delta''\delta^{-1} - \delta'^3\delta^{-2}) \\ &- \delta'\delta^{-2} f'f'' - \eta^2 ff'''\delta'^3\delta^{-2} - ff'''\delta'\delta^{-2} = 0, \end{aligned} \tag{13. 4. 3b}$$

where the prime indicates the derivative with respect to the independent variabless or η. System (13. 4. 3) obviously has the solution $\delta(s) = \text{constant}$, $f^{(\mathrm{IV})} = 0$, which corresponds to the constant boundary layer thickness solution. Additional conclusions can be made with regard to the two-dimensional, incompressible, steady, boundary layer problem and the corresponding self-superposable system given by equations (13. 4. 3), but such comments will be set aside for the present awaiting a more detailed examination of the given equations. To illustrate, by inspection, the following solution is clear: For any arbitrary boundary layer thickness $\delta(s)$ including of course the classical parabolic expression $\delta(s) = s^{1/2}$, and $f = a\eta$, which is just the linear term in Pohlhausen's polynomal, equations (13. 4. 3) are satisfied. Considering the class of functions $\delta(s) = as^m$, one can show that $m = 1$ is the only value which will eliminate the function $\delta(s)$ from equations (13. 4. 3) thereby accomplishing the required separation of variables. These equations then become:

$$(a^2\eta^2 + 1)\, ff'' = \text{constant}; \tag{13. 4. 4a}$$

$$4a^2(3a^2\eta^2 + 1)\, f'' + 8a^2\eta(a^2\eta^2 + 1)\, f''' + (a^2\eta^2 + 1)^2 f^{(\mathrm{IV})} = 0. \tag{13. 4. 4b}$$

Equation (13. 4. 4b) is of course given by equation (13. 3. 4) with $D = E = 0$ and must be solved simultaneously with equation (13. 4. 4a) for $f(\eta)$.

14. 0 Conclusions.

One of the more important purposes of this paper has been to put the subject of superposability as it is applied to hydrodynamics on a sound fundamental basis with clear and unique definitions. This was accomplished first with the equation of motion for an incompressible Newtonian flow which was previously investigated by such authors as Ballabh and Strang and subsequently for additional significant equations of motion in fluid dynamics including those for compressible Newtonian, incompressible and compressible non-Newtonian, magneto-hydrodynamic and the potential equation. In addition, the derived topics of boundary value problems and overspecified systems were discussed with an eye toward applying the available literature to the problem at hand.

As a result of applying the concepts of superposability and self-superposability to the above mentioned hydrodynamic equations the following two applications are immediately apparent: Having established superposability equations in the various cases, we have established that in many cases to each fluid motion there corresponds an infinite class with which it forms an additive set, the class being defined by the superposability condition. Given U_1, the superposability condition defines an infinite class of vector functions U_2 which form an additive set with U_1. This provides an excellent tool for the first type of application of the concept of superposability, namely for constructing such motions. Ballabh, Strang and Ergun have made investigations of this nature using their definitions for the incompressible Newtonian equation of motion. Since this particular application lends itself best to specialized investigations no attempt has been made in this paper which deals with the general question of superposability to seek such applications although any time the general superposability condition has been established the way is left open for such considerations.

Having established the self-superposability equations in the various cases a second application is made available, one which has been used extensively in this paper due to its general nature. This application amounts to utilizing the self-superposability condition to associate with the original system of partial differential equations one of which is nonlinear, a system of linear and nonlinear equations which can be solved in certain instances. The necessary constructional link (but of course not fundamental) is provided to show that the solution to the resultant system is a solution to the original system.

Mathematical physics reptesents our physical observations in mathematical form which is sometimes extremely complicated due to the presence of nonlinear terms. In the present work the main idea was to substitute in a rigorous mathematical manner under suitable conditions linear terms for the nonlinear inertia terms. Due to the lack of data and information, the present discussion must be restricted to some sort of speculation. It seems obvious that the situation may occur where in many physical phenomena, the presentation of the nonlinear terms by means of a linear term via the self-superposability conditions may offer in the final result a negligible deviation from terms of nonlinear character, even if these nonlinear terms are of high magnitude. A good deal of rigor has been introduced into the works of Stokes and Oseen for the so-called Stokes' flow or slow motion where the inertia terms were merely neglected. There is certainly nothing wrong with the statement that any nonlinear inertia term can be represented by a linear term if it is properly chosen through the scalar function π. It is quite possible that the theory of superposability may offer a new and highly rewarding prospect for the theory of fluid dynamics, along with various other fields where the theory of this paper may be applied.

As was noted frequently in the analyses of this paper, applying self-superposability is only of advantage when a linear system can be associated with the original nonlinear one which amounts to the statement that the function π is not specified. If π is given, the resultant associated system is still nonlinear such that little is accomplished by introducing self-superposability. When the resultant system is linear there is the added consideration that in certain instances (usually when ψ cannot be introduced) this system is overspecified and it is necessary to consider the possibility of solutions to such a system based upon the discussion of Chapter 12. In general, when ψ can be introduced the problem of overspecified linear systems is not encountered. To this must be added the required compatibility condition curl $Ss = 0$, as indicated in the text.

By the limiting process used for solving the potential equation in Chapter 9, is suggested the possibility of applying an iteration process in some manner to the various equations of motion considered using the results obtained by applying self-superposability as a first approximation.

Frequently in the analyses of this paper only the surface of the problem has been treated and frequently mathematical detail vital to any thorough treatment of a problem is only pointed out rather than being fully explored. The reason for this fact is that this paper is meant to be only a preliminary cursory treatment of the subject of superposability and self-superposability designed to establish the fundamental facts. It is hoped that this work will suggest many additional applications and analyses treating the detail omitted out of necessity[2]).

Appendix A.

The concept of superposability is first introduced in the analysis of this paper in Chapter 4 as applied to the equation of motion for a viscous, incompressible, Newtonian fluid. The necessary and sufficient condition for superposability discussed in greater detail in the paragraph of equation (2. 0. 1) and section 4. 2 is that equation (4. 2. 9) given by:

$$-\pi_{,i} = U'_j U''_{i,j} + U''_j U'_{i,j}, \tag{A. 1}$$

determines a scalar function π. This condition can be further analyzed from the standpoint of classical analysis of partial differential equations. Equation (A. 1) is of the general form:

$$u_{x_i} = f_i(x_1, \ldots, x_n), \ (i = 1, \ldots, n). \tag{A. 2}$$

The necessary and sufficient condition that equation (A. 2) have a solution $u(x_1, \ldots, x_n)$ is the following consistency equation:

$$f_{i,x_j} \equiv f_{j,x_i}, \ (i, j = 1, \ldots, n). \tag{A. 3}$$

The necessary and sufficient condition for superposability, that equation (A. 1) determines π, implies that the consistency condition given by equation (A. 3) must hold for:

$$f_i = U'_j U''_{i,j} + U''_j U'_{i,j}, \tag{A. 4}$$

i. e., in order that equation (A. 1) possesses a solution π the velocities U' and U'' must satisfy the consistency condition given by equation (A. 3) where f_i is given by equation

[2]) The authors would like to express their appreciation to Professor *W. J. Trjitzinsky* for frequent valuable discussions on various items of the present work.

(A. 4). Imposing the superposability requirement on the equation of motion implies then that the functions U', U'' satisfy, in addition to the given equation of motion, the consistency equations specified above. Let us proceed to evaluate condition (A. 3) for f_i given by equation (A. 4) which in expanded form gives the following three distinct equations:

$$f_{1,y} \equiv f_{2,x};\ f_{1,z} \equiv f_{3,x};\ f_{2,z} \equiv f_{3,y}. \tag{A. 5}$$

For illustrative purposes consider: $f_{1,y} \equiv f_{2,x}$. This would be the only condition necessary for two dimensional motion. From equation (A. 4):

$$f_1 = u' u''_{,x} + v' u''_{,y} + w' u''_{,z} + u'' u'_{,x} + v'' u'_{,y} + w'' u'_{,z}, \tag{A. 5a}$$

$$f_2 = u' v''_{,x} + v' v''_{,y} + w' v''_{,z} + u'' v'_{,x} + v'' v'_{,y} + w'' v'_{,z}. \tag{A. 5b}$$

Applying the given condition to equations (A. 5) we obtain:

$$\begin{aligned} &\partial/\partial y(u' u''_{,x} + v' u''_{,y} + w' u''_{,z} + u'' u'_{,x} + v'' u'_{,y} + w'' u'_{,z}) \\ &\quad = \partial/\partial x\,(u' v''_{,x} + v' v''_{,y} + w' v''_{,z} + u'' v'_{,x} + v'' v'_{,y} + w'' v'_{,z}). \end{aligned} \tag{A. 6}$$

Subtracting the quantities $\frac{\partial}{\partial y}(u' u''_{,x} + u'' u'_{,x})$ and $\frac{\partial}{\partial x}(v' v''_{,y} + v'' v'_{,y})$ from both sides and the equivalent quantities $\partial/\partial y(w' w''_{,x} + w'' w'_{,x})$ from the left side and $\partial/\partial x(w' w''_{,y} + w'' w'_{,y})$ from the right, equation (A. 6) reduces to the following form:

$$\begin{aligned} &\partial/\partial y[(w' \eta'' + w'' \eta') - (v' \zeta'' + v'' \zeta')] \\ &\quad = \partial/\partial x[(u' \zeta'' + u'' \zeta') - (w' \xi'' + w'' \xi')], \end{aligned} \tag{A. 7}$$

where the vorticity components are given by:

$$\xi = w_{,y} - v_{,z};\ \eta = u_{,z} - w_{,x};\ \zeta = v_{,x} - u_{,y}. \tag{A. 8}$$

In order that the superposability equation (A. 1) determines π from our definition equation (A. 7) must be satisfied. Applying the concept of superposability, we are seeking the class of solutions of the equations of motion which are superposable, i. e., we are seeking a class of solutions which satisfy an additional condition imposed by the superposability restriction, namely the partial differential equations given by (A. 7) and the remaining two unspecified here. Equation (A. 7) is identical to equation (2a) of Ballabh's second superposability condition given in Table I of Chapter 4. Applying the remaining two relations of equation (A. 5) we would obtain the other equations in Ballabh's second definition. The correspondence is clarified when one notes that Ballabh's first definition is identical to our condition given by equation (A. 1) from which he obtains his second definition by eliminating π. The necessary and sufficient condition that π can be eliminated is the consistency equation:

$$\pi_{,ij} \equiv \pi_{,ji}. \tag{A. 9}$$

We have obtained the same set of equations (A. 7) and others from the definition of superposability used in this paper from the previously noted observation, namely equation (A. 3), from the requirements of classical analysis for partial differential equations. It is interesting to note that the majority of the applications of the concept of superposability and self-superposability in the works of Ballabh, Strang, etc., to solving the equations of motion and continuity for incompressible flow are based on the derived conditions given by equation (A. 7).

In the event that the function π was to enter implicitly in our superposability or self-superposability equations, the following reasoning would apply: The equations would be of the general form:

$$F_i(x_1, \ldots, x_n;\ u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) = 0,\ (i = 1, \ldots, n). \tag{A. 10}$$

The necessary and sufficient condition that equation (A. 10) have a solution $u(x_1, \ldots, x_n)$ is that the Poisson bracket vanish, i. e.:

$$(F_i, F_j) = 0. \tag{A. 11}$$

Equation (A. 11) would then replace the consistency condition given by equation (A. 3).

The question of the existence of solutions of the equation of motion satisfying the additional consistency conditions, i. e., the existence of solutions which are superposable or self-superposable, is not considered from a rigorous mathematical point of view at this time due to the obvious complexities involved but it is assumed that such solutions exist.

Bibliography.

1. *Ram Ballabh*, Superposable Fluid Motions, Proceedings of the Benares Mathematical Society, new series, **2** (1940), 69—79.
2. *Ram Ballabh*, Self-Superposable Motions of the type $\xi = \lambda u$, etc. Proceedings of the Benares Mathematical Society, new series, **2** (1940), 85—90.
3. *Ram Ballabh*, Superposable Motions in a Heterogeneous Incompressible Fluid, Proceedings of the Benares Mathematical Society, new series, **3** (1941), 1—10.
4. *Ram Ballabh*, On Two Dimensional Self-Superposable Fluid Motions, Proceedings of the Benares Mathematical Society, new series **4** (1942), 27—31.
5. *Ram Ballabh*, Steady Uniplanar Superposable Fluid Motions, Journal Indian Math. Soc., **7** (1943), 36—41.
6. *Ram Ballabh*, On Two Dimensional Superposable Flows, Journal Indian Math. Soc., **16**, 4, 191.
7. *G. K. Batchelor*, On the Spontaneous Magnetic Field in a Conducting Liquid in Turbulent Motion, Proc. Roy. Soc. of London, (A), **201**, 405—416.
8. *Ratib Berker*, Sur Quelques Cas d'intégration des Équations du Mouvement d'un Fluide Visquex Incompressible, Thesis, University of Lille, France, 1936.
9. *Dorothy L. Bernstein*, Existence Theorems in Partial Differential Equations, Annals of Mathematics Study, **23** (1950).
10. *Ludwig Bieberbach*, Theorie der Differentialgleichungen, Springer Berlin, 1932, reprinted Dover, N. Y., 1944.
11. *J. Boussinesq*, Sur l'influence des Frottements dans les Mouvements Réguliers des Fluides, Journ. Math. Pures et Appl., (2), **13**, 377—438.
12. *C. Caratheodory*, Variationsrechnung und Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Teubner, Leipzig, 1935.
13. *S. Chandrasekhar*, The Invariant Theory of Isotropic Turbulence in Magneto-Hydrodynamics, Proc. Roy. Soc. of London, (A), **204**, 405—416.
14. *W. F. Durand*, Aerodynamic Theory, vol. 3, Sections 11 and 12.
15. *Engel-Faber*, Die Liesche Theorie der Partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Teubner, Leipzig, 1932.
16. *A. N. Ergun*, Some Cases of Superposable Fluid Motions, Ankara Universite Faculte des Sciences, Comm., **2** (1949), 49—88.
17. *A. N. Ergun*, Self-Superposable Fluid Motions, Ankara Universite Faculte des Sciences, Comm., **6** (1954), 89—152.
18. *Kampé de Fériet*, Sur Quelques Cas d'intégration des Équations du Mouvement Plan d'un Fluide Visqueux Incompressible, Société Scientifique de Bruxelles Annales, (A), **50** (1930), 77—80.
19. *Kampé de Fériet*, Détermination des Mouvements Plans d'un Fluide Visqueux Incompressible, oú le Tourbillon est Constant le long des Lignes de Courant, Mathematiker Kongress Zürich, Band II (1932), 298—299.
20. *I. Fredholm*, Sur une classe d'Équations Fonctionelles, Acta Math., **27** (1903), 365—390.
21. *S. Gellerstedt*, Sur une Équation aux Dérivées Partielles de Type Mixte, Arkiv for Matematik Astronomi och Fysik, **25 A** (1937), 29, 1—23.

22. *R. H. J. Germay*, Sur l'intégration par Approximations Successives des Systemes en Involution d'Équations Simultanées, an Dérivées Partielles du Premier Ordre, a une Fonction Inconnue, Soc. Roy. Sc. Liege, Bull. **7** (1938), 525—534.
23. *S. Goldstein* and others, Modern Developments in Fluid Dynamics, volumes 1 and 2, Oxford, 1938.
24. *E. Goursat*, Lecons sur L'intégration des Équations aux Dérivées Partielles du Premier Ordre, Paris, second edition, 1921.
25. *J. Hadamard*, Lectures on Cauchy's Problem, Yale Univ. Press, Conn., 1923; Dover Publ., Inc., New York, 1952.
26. *D. Hilbert*, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Sixth memoire, 1910; and Berlin, second ed., 1924.
27. *H. Holmgren*, Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik, **1** (1904).
28. *M. Janet*, Sur les Systèmes D'Équations aux Dérivées Partielles, Journal de Mathematiques Pures et Appliquées, (8), **3** (1920), 65—151.
29. *M. Janet*, Les Systèmes d'Équations aux Dérivées Partielles, Gauthier-Villars, Paris, 1927.
30. *M. Janet*, Les Systèmes D'Équations aux Dérivées Partielles, Mémorial des Sciences Mathématiques, **21** (1927).
31. *M. Janet*, Lecons sur les Systemes d'Équations aux Dérivées, Paris, 1929.
32. *G. Joos*, Theoretical Physics, second ed., 1951, 562.
33. *E. Kamke*, Bemerkungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Math. Zeit., **49** (1943), 256—284.
34. *M. Z. v. Krzywoblocki*, On the Equations of Isotropic Turbulence in Magneto-Hydrodynamics of Compressible Medium, Acta Physica, Austriaca, **6** (1952), 2/3.
35. *M. Z. v. Krzywoblocki*, On the Development of the Mathematical Theory of the Boundary Layer, Seorsum Impressum Ex Tom. 3 Comm. Math. Univ. Sancti Pauli, Tokyo, 1954.
36. *H. Lamb*, Hydrodynamics, third edition, 1906.
37. *E. E. Levi*, Rendic. Circ. Mat. Palermo, **24** (1907), 275—317.
38. *A. J. A. Morgan*, The Reduction by one of the Number of Independent Variables in some Systems of Partial Differential Equations, Quarterly Journal of Math., Oxford second series, **3** (1952), 12.
39. *C. L. M. H. Navier*, Mémoire Sur les Lois du Mouvement des Fluides, Mémoires de L'Académie des Sciences de l'Institut de France, **6** (1822), 389—440.
40. *C. W. Oseen*, Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik, Arkiv for Matematik, Astronomi, **6** (1910), 29.
41. *S. D. Poisson*, Mémoire sur les Équations Génerales de l'Équilibre et du Mouvement des Corps Solides Élastiques et des Fluides, Journal de l'École Polytechnique Paris, **13** (1829), 20, 139.
42. *P. Prakash*, On Two Dimensional Superposable Motions, Ganita, **2** (1951), 2, 75—80.
43. *P. Prakash*, Two Dimensional Steady Flows Superposable on a Source, Sink or Doublet, Calcutta Math. Soc. Bulletin, **45** (1933), 51.
44. *P. Prakash*, Superposition of Orthogonal Flows, The Mathematical Student, **22** (1954), 2, 129—135.
45. *M. Reiner*, A Mathematical Theory of Dilatancy, Amer. Journ. Math., **67**, 360—362.
46. *C. Riquier*, Les Systèmes d'Équations aux Dérivées Partielles, Gauthier-Villars, Paris, 1910.
47. *C. Riquier*, La Méthode des Fonctions Majorantes et les Systèmes d'Équations aux Dérivées Partielles, Mémorial des Sciences Mathématiques, **32** (1928).
48. *J. F. Ritt*, Differential Equations from the Algebraic Standpoint, Amer. Math. Soc. Colloq. Public, **14** (1932).
49. *R. S. Rivlin*, The Hydrodynamics of Non-Newtonian Fluids, I, Proc. Roy. Soc. London, (A), **193**, 260—281.
50. *N. Saltykow*, Étude sur les intégrales de S. Lie des Équations aux Dérivées Partielles du Premier Ordre . . ., Bull. Acad. des Sc. Math. Nat.; Acad. Roy. Serbe. Belgrade, **5** (1939), 75—129.
51. *G. G. Stokes*, Mathematical and Physical Papers, **1**, 75—129.
52. *J. A. Strang*, Self-Superposable Motion of a Viscous Incompressible Fluid Referred to Rotating Axes, Proceedings of the Benares Mathematical Soc., new series, **4** (1942), 9—18.
53. *J. A. Strang*, Superposable Fluid Motions, Ankara Universite Faculte des Sciences Comm., **1** (1948), 1—32.
54. *J. M. Thomas*, Note on a Differential Equation, Annals of Math., **28** (1926), 240—244.
55. *J. M. Thomas*, Systems of Total Differential Equations, Annals of Math., **28** (1926), 379—385.
56. *J. M. Thomas*, Incomplete Systems of Partial Differential Equations, Proc. of the National Acad. of Science, **14** (1928), 666—670.
57. *J. M. Thomas*, Riquier's Existence Theorems, Annals of Math., **30** (1928), 285—310.
58. *J. M. Thomas*, Matrices of Integers Ordering Derivatives, Trans. of the Amer. Math. Soc., **33** (1931), 389—410.
59. *J. M. Thomas*, The Condition for an Orthonomic Differential System, Trans. of the Amer. Math. Soc., **34** (1932), 332—338.

60. *J. M. Thomas*, Regular Differential Systems of the First Order, Proc. of the National Acad. of Science, **19** (1933), 451—453.
61. *J. M. Thomas*, Riquier's Existence Theorems, Annals of Math., **35** (1934), 306—311.
62. *J. M. Thomas*, Differential Systems, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **21** (1937).
63. *J. M. Thomas*, Orderly Differential Systems, Duke Math. Journal, **7** (1940), 249—290.
64. *T. Y. Thomas* and *E. W. Titt*, On the Elementary Solution of the General Linear Differential Equation of the Second Order with Analytic Coefficients, Journ. Math. Pures appl., **18** (1939), 217—248.
65. *C. Truesdell*, The Kinematics of Vorticity, Indiana University Publications, Science Series **19** (1954).

Eingegangen 25. Januar 1957.

Verallgemeinerung eines ordnungsgeometrischen Reduktionssatzes.

Herrn Hermann Künneth zum fünfundsechzigsten Geburtstag gewidmet.

Von *Otto Haupt* in Erlangen.

Einleitung.

1. Ein Kontinuum C im projektiven n-dimensionalen Raum P_n ist jedenfalls dann (erbliche) Bogensumme, wenn C einen beschränkten schwachen Komponentenordnungswert besitzt (vgl. auch Nr. 1. 2. vorliegender Arbeit) und wenn die Hyperebenen H des P_n mit diskontinuierlichem $C \frown H$ dicht liegen im Raum R_n aller Hyperebenen des P_n (vgl. *) [3], 2. 1. und 2. 2. 1.). In Nr. 1. 7. wird unter anderem eine Umkehrung dieses Satzes bewiesen, derzufolge für ein Kontinuum C, das Bogensumme ist und das einen beschränkten schwachen Kompenentenordnungswert besitzt, die Hyperebenen H mit diskontinuierlichem $C \frown H$ dicht liegen in R_n.

2. Die soeben erwähnten und andere Ergebnisse des § 1 dienen zugleich als Hilfsmittel bei den Betrachtungen der §§ 2 und 3. In diesen handelt es sich um Verallgemeinerungen eines sogenannten Reduktionssatzes. In der Theorie der geometrischen Ordnungen für Bogen ist es nämlich von Interesse, zu wissen, ob der — jeweils in Betracht gezogene — Ordnungswert eines abgeschlossenen Bogens (also einschließlich der Endpunkte des Bogens) gleich ist dem Ordnungswert des offenen Bogens (also ausschließlich der Endpunkte). Den unseres Wissens ersten derartigen „Reduktionssatz" hat Herr A. Marchaud [6] aufgestellt und bewiesen; er zeigte nämlich — kurz gesagt — für Bogen im euklidischen E_n, daß die sogenannten „starken" Punktordnungswerte (vgl. Nr. 1. 2.) des abgeschlossenen und des offenen Bogens einander gleich sind, falls einer von beiden beschränkt ist. Ein von Herrn Marchaud konstruiertes Gegenbeispiel (vgl. Nr. 2. 3. 1) führt nun zur Bemerkung, daß der Marchaudsche Reduktionssatz im E_n, $n \geqq 2$, allgemeiner, nämlich etwa für jeden Baum von einem beschränkten „schwachen" Punktordnungswert, gilt, falls seine Endpunkte linear unabhängig sind (vgl. Nr. 2. 2. 1.); es können also im Reduktionssatz an Stelle der „starken" die etwas allgemeineren „schwachen" Punktordnungswerte und noch allgemeiner an Stelle der Punkt- die Komponentenordnungswerte treten. Schließlich erweist sich der Marchaudsche Reduktionssatz (in entsprechend modifizierter Formulierung) als gültig sogar für die sogenannten „ordnungsreduziblen" Kontinuen von einem beschränkten schwachen Punktordnungswert (vgl. § 3, Satz 1); Spezialfälle solcher Kontinua liefern die oben genannten Bäume.

3. Der Beweis des 1. Satzes in § 3 beruht auf einem in Nr. 2. 3. gewonnenen Reduktionssatz für ordnungsreduzible Kontinua von einem beschränkten schwachen Komponenten-, also (§ 3, Satz 2, Zusatz) Punktordnungswert. Dieser letztere Satz dient zu-

*) Zahlen in eckiger Klammer im Text verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schlusse vorliegender Arbeit. Angaben im Text wie „vgl. Nr. 1. 2." verweisen auf die betr. Nummer in vorliegender Arbeit.

gleich zum Nachweis, daß für derartige Kontinuen unter anderem alle schwachen Punkt- und Komponentenordnungswerte gleich dem starken Komponentenordnungswert sind (§ 3, Satz 3).

4. Das beim Beweis des Satzes in Nr. 2. 3. angewandte Verfahren liefert übrigens auch einen Beweis für den entsprechenden allgemeinen Satz im Falle ebener Bogen, für die Ordnungswerte definiert sind bezüglich eines Systems von Ordnungscharakteristiken, deren jede durch q ihrer Punkte eindeutig bestimmt ist (vgl. einen diesbezüglichen speziellen Satz in [1], Nr. 2. 4.).

§ 1. Kennzeichnung der erblichen Bogensummen, die Kontinua und von beschränktem schwachem Komponentenordnungswert sind.

1. 1. Mit P_n werde der *projektive, n-dimensionale Raum* bezeichnet, wobei $2 \leqq n$. Es kann P_n als metrischer, kompakter und rationaler Raum aufgefaßt werden. Mit $\bar{M}$ bzw. mit $\underline{M}$ wird die abgeschlossene Hülle bzw. der offene Kern von M bezüglich P_n bezeichnet. Jeder t-dimensionale lineare Unterraum L_t von P_n heiße t-Ebene (in P_n), wobei $0 \leqq t \leqq n-1$ und jedes L_{-1} leer ist. Unter dem $(n-1)$-Büschel $\mathfrak{b}$ mit der Achse A verstehen wir die Gesamtheit aller $(n-1)$-Ebenen, in denen die $(n-2)$-Ebene A enthalten ist. Als Rang r einer Menge $M \subset P_n$ bezeichnen wir die kleinste ganze Zahl p derart, daß M in einem L_p enthalten ist; dabei kann $0 \leqq r \leqq n$ sein. — Übrigens lassen sich die $(n-1)$-Ebenen des P_n deuten als die Punkte eines projektiven, n-dimensionalen Raumes R_n.

Unter einem Kontinuum in P_n wird verstanden jede mehrpunktige, zusammenhängende (in P_n) abgeschlossene Menge. Als Bogen bezeichnen wir jedes topologische Bild einer abgeschlossenen Strecke, ferner als *offenen Teil* $\underset{\sim}{B}$ des Bogens B diejenige zusammenhängende Menge, die aus B durch Wegnahme der beiden Endpunkte von B entsteht, und als *offenen Bogen* jede Menge, die offener Teil eines Bogens ist.

1. 1. 1. Eine Menge $M \subset P_n$ heiße beschränkt (bezüglich L'_{n-1}), wenn $\bar{M}$ fremd ist zu einer $(n-1)$-Ebene L'_{n-1}, die dann als *uneigentliche* $(n-1)$-Ebene L^u (für $\bar{M}$) aufgefaßt werden kann. Beispiele beschränkter Mengen: Jedes Simplex vom Rang r, $0 \leqq r \leqq n$; jede endliche Menge; jede hinreichend kleine Umgebung eines Punktes oder, allgemeiner, einer beschränkten Menge.

Zeichnet man in P_n eine $(n-1)$-Ebene L^u als *uneigentlich* aus, so wird $A_n = P_n - L^u$ durch jede, von L^u verschiedene $(n-1)$-Ebene L_{n-1} in zwei, von L_{n-1} begrenzte in A_n offene Halbräume $(L_{n-1}; \pm)_n$ zerlegt, die wir als die beiden Seiten, etwa die positive und die negative Seite, unterscheiden können. Entsprechend werden in einem L_k, durch Auszeichnung eines in L_k enthaltenen L_{k-1} als uneigentlich, für jede, von L_{k-1} verschiedene $(k-1)$-Ebene eine positive bzw. negative Seite erklärt, bzw. eine positive bzw. negative k-Halbebene.

1. 2. Es sei $\mathfrak{f}$ eine Gesamtheit von $(n-1)$-Ebenen des P_n. Ist dann $M \subset P_n$ eine beliebige Menge und $D = M \cap L_{n-1}$ für ein $L_{n-1} \in \mathfrak{f}$, so heiße die Mächtigkeit der Menge der Komponenten[1]) von D der Komponentenordnungswert von M bezüglich L_{n-1}, abgekürzt: $KOW(M; L_{n-1}) = z$. Hingegen wird die Mächtigkeit m von D bezeichnet als der Punktordnungswert von M bezüglich L_{n-1}, abgekürzt: $POW(M; L_{n-1}) = m$. Ist nun die natürliche Zahl a Maximum der $KOW(M; L_{n-1})$ bzw. der $POW(M; L_{n-1})$ für

[1]) Unter einer *Komponente* einer Menge $M \subset P_n$ wird jede nicht leere, größte zusammenhängende Teilmenge von M verstanden. Jede Komponente der Menge M ist abgeschlossen in M (vgl. [5], S. 152).

alle $L_{n-1} \in \mathfrak{f}$, so heißt M vom (beschränkten) starken $\mathfrak{f}$-*Komponenten-* bzw. starken $\mathfrak{f}$-*Punkt*ordnungswert a, abgekürzt: *st.* $\mathfrak{f}$-$KOW(M) = a$ bzw. *st.* $\mathfrak{f}$-$POW(M) = a$. Falls auf die Angabe von a verzichtet wird, sagen wir, K besitze (einen) beschränkten *st.* $\mathfrak{f}$-*KOW* bzw. *st.* $\mathfrak{f}$-*POW*. Ist $\mathfrak{f}$ eine (beliebige) Menge von $(n-1)$-Ebenen, ist ferner $\mathfrak{n}$ eine (bezüglich R_n) in $\mathfrak{f}$ nirgends dichte Menge, so heiße M von einem beschränkten schwachen $\mathfrak{f}$-Komponenten- bzw. $\mathfrak{f}$-Punktordnungswert schlechthin, wenn *st.* $(\mathfrak{f}-\mathfrak{n})$-$KOW(M) \doteq a < +\infty$ bzw. *st.* $(\mathfrak{f}-\mathfrak{n})$-$POW(M) = a$; abgekürzt: *schw.* $\mathfrak{f}$-$KOW(M)$ bzw. *schw.* $\mathfrak{f}$-$POW(M)$. Ist insbesondere $\mathfrak{f} = R_n$ und $\mathfrak{n}$ leer[2]), so bezeichnet man M als von beschränktem starkem Komponenten- bzw. Punktordnungswert schlechthin oder, soweit erwünscht, von beschränktem starkem R_n-*KOW* usw. Ein beschränkter *schw.* $\mathfrak{f}$-$POW(M)$ ist zugleich ein beschränkter *schw.* $\mathfrak{f}$-$KOW(M)$.

1. 3. Es gilt der

Satz. Vor. *Es sei $C < P_n$ ein Kontinuum. Ein* schwacher *Komponentenordnungswert von C sei (beschränkt und) gleich a.* — Beh. *Es besitzt C einen beschränkten* starken *Komponentenordnungswert a' (mit $a' < 1 + 2^{n+1}(n+1)\,a^2$).*

Anmerkung. Ein etwas weniger kurzer Beweis, aber mit der schärferen Schranke $3a + 1$ für a', findet sich in [3], Nr. 2. 2. (S. 485).

Bew. (1). Nach Definition des *schw. KOW* existiert eine, in R_n offene Menge $\mathfrak{o}$ derart, daß für jedes $L_{n-1} \in \mathfrak{o}$ die Anzahl der Komponenten von $C \cap L_{n-1}$ höchstens gleich a ist. Es gibt daher $n+1$ linear unabhängige $L_{n-1} \in \mathfrak{o}$, etwa $L^1, \ldots, L^{n+1}$, und diese zerlegen P_n in 2^n (je beschränkte) Simplizes T_μ mit paarweise fremden offenen Kernen, $\mu = 1, \ldots, 2^n$. Da die Begrenzung G_μ von T_μ in $L^1 \cup \cdots \cup L^{n+1}$ enthalten ist, besitzt $C \cap G_\mu$ höchstens $\bar{a} = (n+1)\,a$ Komponenten. Daher ist $C \cap \overline{T}_\mu$ Vereinigung von höchstens $\bar{a}$ je beschränkten Kontinuen $C_{\mu t}$ (vgl. z. B. [3], Nr. 1. 3. 3., Bew. S. 480). Dabei besitzt jedes $C_{\mu t}$ einen *st. KOW* $a'_{\mu t} \leqq 2a$ (weil $C_{\mu t}$ beschränkt ist; vgl. [2], Nr. 2. 2.). Somit besitzt $C = \bigcup_{\mu,t} C_{\mu t}$ einen *st. KOW* a', der kleiner ist als

$$1 + \Sigma_\mu(\Sigma_t a'_{\mu t}) \leqq 1 + 2^n(n+1)\,a \cdot 2a;$$

w. z. b. w.

Bemerkung. Unter zusätzlichen Annahmen über C läßt sich zeigen, daß $a = a'$ ist (vgl. § 3, Satz 2).

1. 4. Unter einer Bogensumme S versteht man eine Vereinigung von abzählbar vielen Bogen B_r; o. B. d. A. kann und soll dabei angenommen werden, daß die B_r paarweise höchstens Endpunkte gemeinsam haben (vgl. [8], 1.). Für Bogensummen, die zugleich Kontinua sind, stimmen nun, wie wir zeigen werden (vgl. Nr. 1. 7., Satz), ein starker und ein schwacher Komponentenordnungswert überein, falls sie (oder vielmehr falls einer von ihnen) beschränkt sind. Der Beweis dieses Satzes beruht auf folgenden beiden Hilfssätzen.

1. 4. 1. Hilfssatz. Vor. *Es sei $S = \bigcup_r B_r < P_n$ Bogensumme. Ferner sei $A = L_{n-1}$ Achse eines $(n-1)$-Büschels $\mathfrak{b}$. Wir setzen $S' = S - A = S - S \cap A$.*

Beh. *Ist $L_{n-1} \in \mathfrak{b}$, so enthält jede mehrpunktige Komponente K von $D' = S' \cap L_{n-1}$ einen Bogen, der Teilbogen mindestens eines der B_r ist.*

Bew. (1). Im metrischen (rationalen) Raum S' ist K eine mehrpunktige zusammenhängende Menge, also (vgl. z. B. [5], S. 153, VII.) überabzählbar. Da die Menge E der Endpunkte aller B_r abzählbar ist, gibt es mindestens ein B_r und einen in $\underset{\sim}{B}_r$ enthaltenen Bogen $B^0 = \overline{B}^0 < S'$ derart, daß $K^0 = K \cap B^0$ überabzählbar ist (z. B. ist in jeder Um-

[2]) Die *leere Menge* wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

gebung eines Kondensationspunktes in einem (stets existierenden) überabzählbaren $K \cap \underset{\sim}{B}_r$ ein solches B^0 enthalten). Ferner ist K, weil abgeschlossen in $D' < S'$ (vgl. z. B. [5], S. 152, VI.), Durchschnitt von D' mit einer in S' abgeschlossenen Menge K'; weil D' abgeschlossen in S' ist (wegen der Abgeschlossenheit von L_{n-1} in P_n), ist $K = K' \cap D'$ abgeschlossen auch in S' und folglich $K^0 = K \cap B^0$ abgeschlossen in $B^0 = \overline{B}^0 < S'$. — (2) Angenommen, K^0 enthält keinen Teilbogen von B_r. Dann ist K^0, weil abgeschlossen, nirgends dicht in B^0. Daher gibt es Teilbogen B', B'' von $\underset{\sim}{B}^0$ mit $B' = \overline{B}'$, $B'' = \overline{B}''$, die untereinander und zu K^0 fremd sind; es ist dann $Q = \overline{B}' \cup \overline{B}'' < B^0$ abgeschlossen in B^0 und daher in S'; außerdem ist $K^0 \cap Q = \emptyset$. Da ferner K^0 unendlich ist, können und sollen B', B'' überdies so gewählt werden, daß jeder der 3 offenen (und in S' offenen) Bogen, als deren Vereinigung $\underset{\sim}{B}^0 - Q$ darstellbar ist, Punkte von K^0 enthält. Es sei nun $B = \underset{\sim}{B}$ derjenige unter diesen 3 offenen Bogen, dessen einer Endpunkt zu B' und dessen anderer zu B'' gehört. Dann gilt $K \cap \underset{\sim}{B} = K \cap \overline{B} \neq \emptyset$; ferner ist neben $K^0 \cap Q = \emptyset$ auch $K \cap Q = \emptyset$, weil $K \cap Q = (K - K^0) \cap Q + K^0 \cap Q = (K - K \cap B^0) \cap Q < (K - K \cap B^0) \cap B^0 = \emptyset$, weil $Q < B^0$. Daraus folgt: Es ist K darstellbar als Vereinigung zweier in K offener, fremder Mengen; es ist also K nicht zusammenhängend entgegen der Definition von K. In der Tat: Wir setzen $S_r = S' - (Q \cup \overline{B})$. Dann ist $K = K \cap S' = (K \cap S_r) \cup (K \cap (Q \cup \overline{B})) = (K \cap S_r) \cup (K \cap \underset{\sim}{B})$, weil $K \cap Q = \emptyset$ und $K \cap \overline{B} = K \cap \underset{\sim}{B}$. Da aber S_r und $\underset{\sim}{B}$ offen in S' sind, ist $K \cap S_r$ und $K \cap \underset{\sim}{B}$ offen in K; außerdem ist $S_r \cap \underset{\sim}{B} = \emptyset$.

1. 5. Hilfssatz. Vor. (1). *Es sei $S = \bigcup_r B_r$ Bogensumme in P_n und von beschränktem starkem Komponentenordnungswert.* — (2). *Es sei $A = L_{n-2}$ Achse eines $(n-1)$-Büschels $\mathfrak{b}$. Es sei $S^* = S - S \cap A = S - A$ gesetzt.*

Beh. *In beliebiger Nachbarschaft eines jeden $L^0_{n-1} \in \mathfrak{b}$ gibt es $L^*_{n-1} \in \mathfrak{b}$ derart, daß jede Komponente von $D = S \cap L^*_{n-1}$ entweder Komponente von $D^* = S^* \cap L^*_{n-1}$ und dann einpunktig oder in $D - D^*$, also auch in A enthalten ist.*

Bew. Gemäß Nr. 1. 4. 1. enthält jede mehrpunktige Komponente K von D^* einen Teilbogen eines B_r. Für verschiedene L'_{n-1}, $L''_{n-1} \in \mathfrak{b}$ sind die Komponenten von $S^* \cap L'_{n-1}$ fremd zu denen von $S^* \cap L''_{n-1}$. Es gibt aber nur abzählbar viele Teilbogen der B_r aus S, die paarweise fremd sind. Mithin gibt es höchstens abzählbar viele $L_{n-1} \in \mathfrak{b}$ mit mehrpunktigen Komponenten von $S^* \cap L_{n-1}$. Die übrigen $L_{n-1} \in \mathfrak{b}$ liegen daher dicht in $\mathfrak{b}$. Es sei L^*_{n-1} ein solches L_{n-1}. — Jede einpunktige Komponente K von $D^* = S^* \cap L^*_{n-1}$ ist auch Komponente von $D = S \cap L^*_{n-1}$; denn nach Vor. gibt es nur endlich viele[3]) solche K. Es sei nun H eine mehrpunktige weder zu A noch zu $L^*_{n-1} - A$ fremde Komponente von D. Ist $H' = H \cap (L^*_{n-1} - A)$ nicht leer, so ist jede Komponente von H' enthalten in einer der (endlich vielen) Komponenten K von $S \cap (L^*_{n-1} - A)$ und daher einpunktig. Somit ist H' endlich und (nach Annahme) nicht leer; dann ist aber H nicht in sich dicht, also nicht zusammenhängend. Jede Komponente von D, die nicht fremd ist zu A, ist daher in A enthalten; und eine zu A fremde Komponente von D ist einpunktig.

1. 6. Satz. Vor. (1). *Es sei $S = \bigcup_r B_r$ Bogensumme und Kontinuum im P_n.* — (2) *Es besitze S einen beschränkten schwachen Komponentenordnungswert.*

Beh. *Die $(n-1)$-Ebenen L_{n-1}, für welche $S \cap L_{n-1}$ nur einpunktige Komponenten*[4]) *und zwar nur endlich viele*[3]) *besitzt, liegen dicht im Raum R_n der $(n-1)$-Ebenen des P_n.*

---

[3]) Die leere Menge wird zu den *endlichen* Mengen gerechnet.

[4]) Eine Menge $M < P_n$ heißt *diskontinuierlich*, wenn sie kein Kontinuum enthält. Ist M abgeschlossen (in P_n) und diskontinuierlich, so ist M auch *punkthaft*, d. h. alle Komponenten von M sind einpunktig (vgl. [5], S. 152). — Im Text ist also $S \cap L_{n-1}$ punkthaft (und diskontinuierlich).

Bew. (1). Zu zeigen ist: In beliebiger Nachbarschaft (bezüglich des R_n) einer jeden $(n-1)$-Ebene L^0_{n-1} liegen solche $(n-1)$-Ebenen L'_{n-1}, für die $D = S \frown L'_{n-1}$ nur einpunktige Komponenten besitzt. Das hier verwendete Beweisverfahren besteht in der Konstruktion von, zu L^0_{n-1} beliebig benachbarten, $(n-1)$-Ebenen L^t_{n-1}, $t = 1, \ldots, n-1$, für welche alle etwa vorhandenen mehrpunktigen Komponenten von $S \frown L^t_{n-1}$ in einer $(n-(t+1))$-Ebene liegen. Für $t = n-1$ ist L^{n-1}_{n-1} 0-dimensional, so daß $S \frown L^{n-1}_{n-1}$ nur einpunktige Komponenten besitzt.

(1a) Gemäß Nr. 1. 3., Satz, besitzt S einen *beschränkten starken* Komponentenordnungswert; es sei etwa *st.* $KOW(S) = c$.

(2) Es sei also $A^0 = L^0_{n-1}$ beliebig gegeben; in L^0_{n-1} sei $B^1 = L^1_{n-2}$ beliebig gewählt. Im $(n-1)$-Büschel $\mathfrak{b}$ mit der Achse B^1 gibt es (gemäß Nr. 1. 5., Hilfssatz) beliebig nahe bei A^0 solche $A^1 = L^1_{n-1} \in \mathfrak{b}$, daß jede der (endlich vielen) Komponenten von $D^1 = S \frown A^1$ entweder fremd zu B^1 und dann einpunktig oder nicht fremd zu B^1 und dann in B^1 enthalten ist; insbesondere liegen daher alle etwa vorhandenen mehrpunktigen Komponenten von D^1 in B^1. Für $n = 2$ ist aber B^1 nulldimensional, d. h. einpunktig, also die Beh. des Satzes schon bewiesen.

(2a) *Induktionsannahme.* Es sei $n \geqq 3$ und es sei für ein t mit $1 \leqq t \leqq n-2$ ein zu A^0 beliebig benachbartes $A^t = L^t_{n-1}$ sowie eine $(n-(t+1))$-Ebene $E^t = L_{n-(t+1)}$ mit $E^t < A^t$ konstruiert derart, daß alle mehrpunktigen Komponenten von $D^t = S \frown A^t$ in E^t liegen (für $t = 1$ ist in Ziff. (2) die Konstruktion mit $E^1 = B^1$ durchgeführt). Es ist also $S \frown (A^t - E^t)$ endlich[3]) und zwar enthält es höchstens c Punkte, etwa $x_1, \ldots, x_m$; $0 \leqq m \leqq c$. (Betr. c vgl. Ziff. (1a.)) — Beh. Die Induktionsannahme gilt auch für $t+1$. — Bew. Es gibt ein zu allen x_μ fremdes $B^{t+1} = L^{t+1}_{n-2}$ mit $B^{t+1} < A^t$ derart, daß $E^{t+1} = B^{t+1} \frown E^t$ eine $(n-(t+2))$-Ebene ist. Es ist also $S \frown E^t > S \frown B^{t+1} = S \frown E^{t+1}$. Gemäß Nr. 1. 5., Hilfssatz, gibt es aber $(n-1)$-Ebenen A^{t+1} mit $B^{t+1} < A^{t+1}$, die zu A^t beliebig benachbart sind und für welche alle etwa vorhandenen mehrpunktigen Komponenten von $D^{t+1} = S \frown A^{t+1}$ in B^{t+1} und folglich in E^{t+1} liegen.

(2b) Läßt man also t die Zahlen $1, \ldots, n-2$ durchlaufen, so gelangt man zu einer, zu A^0 beliebig benachbarten, $(n-1)$-Ebene A^{n-1} und zu einer 0-Ebene E^{n-1} mit $E^{n-1} < A^{n-1}$ derart, daß alle Komponenten von $D^{n-1} = S \frown A^{n-1}$, die fremd sind zu E^{n-1}, einpunktig sind, während alle zu E^{n-1} nicht fremden Komponenten von D^{n-1} in E^{n-1} liegen, so daß es höchstens eine einzige derartige Komponente gibt, die überdies einpunktig ist. Somit sind alle Komponenten von D^{n-1} einpunktig. Es ist also A^{n-1} ein L'_{n-1} im Sinne der Ziff. (1).

1. 7. Mit Hilfe von Nr. 1. 6. ergibt sich nun der

Satz. Vor. *Es sei C ein Kontinuum im P_n. Ein schwacher Komponentenordnungswert von C sei (beschränkt und) gleich a.*

Beh. *Folgende vier Aussagen sind gleichwertig:* (1) *Ein schwacher Punktordnungswert von C ist beschränkt (und gleich a.).* — (2) *Es ist C erbliche*[5]) *Bogensumme.* — (3) *Es ist C Bogensumme.* — (4) *Die $(n-1)$-Ebenen L_{n-1} mit diskontinuierlichem $C \frown L_{n-1}$ liegen dicht im Raum R_n der $(n-1)$-Ebenen von P_n*[6]).

Bew. *Aus* (1) *folgt* (2). Dies ist bekannt (vgl. [3], Nr. 2. 1.). — *Mit* (2) *gilt* erst recht (3). — *Aus* (3) *folgt* (4) gemäß Nr. 1. 6. — *Aus* (4) *folgt* (1) gemäß [3], Nr. 2. 2. 1.

---

[5]) Eine stetige Kurve heißt *erbliche Bogensumme*, wenn sie selbst sowie jedes Teilkontinuum Bogensumme ist.

[6]) Daß (1) aus (3) folgt, ist für den Fall, daß C ein einfacher Bogen und daß *st.* $KOW(C) = a$ ist, in [4], S. 302, gezeigt.

§ 2. Ein Reduktionssatz für ordnungsreduzible Kontinua von beschränktem schwachem Punktordnungswert.

2. 1. Es sei C ein Kontinuum vom Rang n, so daß also C verschieden von $D = C \cap L_{n-1}$ ist für jede $(n-1)$-Ebene L_{n-1}. Außerdem sei C von *beschränktem* schwachem, also (Nr. 1. 3.) auch *starkem Komponentenordnungswert.* In jeder der endlich vielen Komponenten K von D mündet [7]) mindestens eine Komponente F von $C - D = C - L_{n-1}$ [8]); jeder Punkt von K, in dem ein F mündet, heiße ein *zu K gehöriger Mündungspunkt.*

Es sei nun $D \neq \emptyset$. Die Komponenten von D zerfallen in erstens die Komponenten 1. Art, nämlich die nicht-beschränkten, das sind diejenigen, die zu keiner $(n-1)$-Ebene oder, was das gleiche ist, zu keiner in L_{n-1} enthaltenen $(n-2)$-Ebene fremd sind; und in zweitens die Komponenten 2. Art, welche beschränkt sind, d. h. fremd zu mindestens einer in L_{n-1} enthaltenen $(n-2)$-Ebene.

2. 1. 1. Die *Komponenten* 1. *Art* von $D = C \cap L$, wo L eine $(n-1)$-Ebene (und $D \neq \emptyset$) ist, besitzen die folgende Eigenschaft: Zu jeder Umgebung U in P_n einer solchen Komponente K, wobei $U \cap (C - K) \neq \emptyset$ ist, existiert eine Umgebung $\mathfrak{u}$ von L in R_n derart, daß $C \cap U \cap L_{n-1} \neq \emptyset$ für jedes $L_{n-1} \in \mathfrak{u}$ (vgl. [3], Nr. 1. 4. 3., Bew.). Wir bezeichnen daher die Komponenten 1. Art auch als *Schnittkomponenten* 1. *Art.*

2. 1. 2. Es sei K eine *Komponente* 2. *Art* von $D' = C \cap L'_{n-1}$ und B' eine zu K fremde $(n-2)$-Ebene in L'_{n-1}. Es sei $\mathfrak{b}$ das $(n-1)$-Büschel mit der Achse B' und $\mathfrak{u}$ eine Umgebung von L'_{n-1} in $\mathfrak{b}$. Bezeichnet U die Menge der Punkte aller $L_{n-1} \in \mathfrak{u}$, so mündet in K mindestens eine Komponente F' von $C' = C \cap (U - L'_{n-1})$; denn $D' \neq C \cap U$ und C ist ein Kontinuum [8]). Beachtet man, daß in U die Unterscheidung zweier Seiten von L'_{n-1} möglich ist (vgl. Nr. 1. 1. 1.), so lassen sich die Komponenten K von D' so einteilen: Es heißt K Schnitt- bzw. Stütz*komponente* (2. Art) von C in D', wenn auf beiden Seiten bzw. nur auf einer Seite von L'_{n-1} Komponenten F' von C' liegen, die in K münden (vgl. auch [2], Nr. 2. 3.). Die *Stütz*komponenten K zerfallen ihrerseits in zwei Klassen, nämlich in die sogenannten inneren und die nicht-inneren; dabei wird die Stützkomponente K von D' als innere bezeichnet, wenn in K (mindestens) zwei Komponenten von C' münden, andernfalls als nicht-innere (bezüglich U). Die Eigenschaft von K, Schnitt- usw. Komponente zu sein, ist unabhängig von der Wahl des B' bzw. $\mathfrak{u}$, falls U hinreichend klein ist (vgl. [2], Nr. 2. 3.).

2. 1. 2. 1. Es gilt: Ist K *Schnitt*komponente 2. Art von D', so gibt es zu jeder Umgebung V von K in P_n eine Umgebung $\mathfrak{v}$ von L'_{n-1} im Raum R_n der $(n-1)$-Ebenen des P_n derart, daß für jedes $L_{n-1} \in \mathfrak{v}$ (mindestens) eine, in V enthaltene Schnittkomponente von $C \cap L_{n-1}$ existiert. Ist dagegen K *Stütz*komponente (2. Art) von D', so gibt es zu jeder Umgebung W von K in P_n beliebig nahe bei L'_{n-1} eine in R_n offene Menge $\mathfrak{w}$ derart, daß $C \cap L_{n-1}$ für jedes $L_{n-1} \in \mathfrak{w}$ mindestens eine in W enthaltene *Schnitt*komponente 2. Art besitzt und zwar (mindestens) zwei solche Schnittkomponenten, wenn K innere Stützkomponente ist; insbesondere gehören zu einem solchen, zu L'_{n-1} hinreichend benachbarten, $\mathfrak{w}$ je alle $(n-1)$-Ebenen H der folgenden Art: Ist G eine zu K fremde, in L'_{n-1} enthaltene, im übrigen beliebige $(n-2)$-Ebene und $\mathfrak{b}$ das $(n-1)$-Büschel mit der Achse G, so bilden die H einen in $\mathfrak{b}$ enthaltenen, in $\mathfrak{b}$ offenen Winkelraum von hinreichend kleiner Öffnung, in dessen Begrenzung L'_{n-1} enthalten ist. (Der Beweis für das vorstehend Behauptete ergibt sich aus [2], Nr. 2. 5. 1. und 2. 5. 2., Bew.)

---

[7]) Eine Menge M *mündet* in der Menge N, wenn (mindestens) ein Häufungspunkt von M in N liegt.

[8]) Weil D nur endlich viele Komponenten besitzt, ist jede ein Stück; und in jedem Stück mündet (mindestens) eine Komponente von $C-D$ (vgl. [2], Nr. 2. 1.).

2. 1. 3. Gemäß [3], Nr. 1. 4. 3. gilt nun: Es besitze C beschränkten starken Komponentenordnungswert und den Rang n. Ferner enthalte $C \frown L'_{n-1}$ (mindestens) k_1 bzw. k_2 *Schnitt*komponenten 1. bzw. 2. Art, also insgesamt $k = k_1 + k_2$ Schnittkomponenten, etwa $K_1, \ldots, K_k$; dabei kann auch $k_1 = 0$ oder $k_2 = 0$ sein. Ist dann $U_\varkappa$ eine Umgebung von $K_\varkappa$ in P_n mit $\bar{U}_\varrho \frown \bar{U}_\varkappa = \emptyset$ für $\varkappa \neq \varrho$; $\varkappa, \varrho = 1, \ldots, k$, — solche $U_\varkappa$ existieren — so gibt es in R_n eine Umgebung $\mathfrak{u}$ von L'_{n-1} der folgenden Beschaffenheit: Es besitzt $C \frown L_{n-1}$ für *jedes* $L_{n-1} \in \mathfrak{u}$ mindestens k Schnittkomponenten $K'_\varkappa$ (von 1. und 2. Art), für die $K'_\varkappa \subset U_\varkappa \frown L_{n-1}$.

2. 2. Wir betrachten später (Nr. 2. 3.) Kontinua C der folgenden speziellen Eigenschaft: Es sei L_{n-1} bzw. L_k eine $(n-1)$- bzw. k-Ebene, wobei $L_k \subset L_{n-1}$; $0 \leqq k \leqq n-1$; für $k = n-1$ ist also $L_k = L_{n-1}$. Zu jedem solchen L_{n-1} und L_k gibt es (mindestens) eine, in L_k enthaltene $(k-1)$-Ebene L_{k-1}, welche fremd ist zu höchstens einer der in L_k enthaltenen, nicht-inneren Stützkomponenten (2. Art) von $C \frown L_{n-1}$. Solche Kontinua C seien als ordnungsreduzibel bezeichnet; *abgekürzt*: ord. red.

Anmerkung. Existieren in $C \frown L_{n-1}$ höchstens innere Stützkomponenten, so erfüllt jedes $L_{k-1} \subset L_k$ die vorstehende Bedingung.

2. 2. 1. Beispiele ordnungsreduzibler Kontinua C, die *keine höchstens hyperebene Teilkontinua* (Teilbogen) enthalten sollen, sind die folgenden: (1) (einfache) Bogen; (2) Bäume[9]), deren Endpunkte linear unabhängig sind; (3) endliche Bogensummen mit nachstehender Eigenschaft: Hat eine Menge E von Endpunkten von C den Rang t, wobei $1 \leqq t \leqq n-1$, so gibt es ein $e \in E$ derart, daß der Rang von $E-(e)$ nicht größer als (mithin gleich) $t-1$ ist.

Bew. *Betr.* (1). Ersichtlich ist (1) Spezialfall von (2). — *Betr.* (2). Es ist (2) Spezialfall von (3). In der Tat: Da es nicht mehr als $n+1$ linear unabhängige Punkte in P_n gibt, besitzt C höchstens $n+1$ Endpunkte, ist also (vgl. [7], Seite 309, zweiter Satz) endliche Bogensumme, d. h.: Vereinigung von endlich vielen Bogen, die paarweise höchstens Endpunkte gemeinsam haben. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Endpunkte von C enthalten die Endpunktmengen vom Rang k genau $k+1$ Endpunkte und je k von diesen liefern eine Menge vom Rang $k-1$. — *Betr.* (3). Da C keine höchstens hyperebenen Teilbogen enthält, ist jede nicht-innere Stützkomponente eines $C \frown L_{n-1}$ einpunktig (vgl. auch Nr. 1. 4. 1.) und mithin ein Endpunkt von C. Ist nun M die Menge der in $C \frown L_k$, $1 \leqq k \leqq n-1$, enthaltenen Endpunkte von C, so ist der Rang von M höchstens gleich k und alle Endpunkte aus M bis auf höchstens einen liegen in einer $(k-1)$-Ebene.

2. 3. Wir beweisen jetzt den

Reduktionssatz. Vor. *Die Bogensumme C sei ein* ordnungsreduzibles *Kontinuum von einem beschränkten schwachen Komponentenordnungswert und vom Rang n.*

Beh. *Ist L^0_{n-1} eine $(n-1)$-Ebene, für welche $D = C \frown L^0_{n-1}$* mindestens *m (Schnitt- und Stütz-)*Komponenten *(1. und 2. Art) besitzt, so existiert beliebig nahe bei $A^0 = L^0_{n-1}$ eine offene Menge $\mathfrak{o}$ in R_n von folgender Beschaffenheit: Für jedes $L'_{n-1} \in \mathfrak{o}$ enthält $C \frown L'_{n-1}$ nur* endlich viele Punkte *und zwar* mindestens *m; die Punkte von $C \frown L'_{n-1}$ sind sämtlich* Schnitt*punkte (also insbesondere Komponenten 2. Art).*

Bew. **(I. 1)** Gemäß Nr. 1. 3., Satz, besitzt C sogar beschränkten *starken* Komponentenordnungswert a und gemäß Nr. 1. 7., Satz, beschränkten schwachen *Punkt*ordnungswert. Es gibt daher in beliebiger Nähe einer jeden $(n-1)$-Ebene L_{n-1} offene Mengen $\mathfrak{u}$ in R_n derart, daß $C \frown L''_{n-1}$ diskontinuierlich, also endlich, ist für jedes $L''_{n-1} \in \mathfrak{u}$.

[9]) Unter einem *Baum* wird jedes im Kleinen zusammenhängende Kontinuum verstanden, das kein topologisches Bild der Kreisperipherie enthält (vgl. [7], S. 304).

(I. 2) Läßt sich nun beliebig nahe bei $A^0 = L^0_{n-1}$ ein L_{n-1} finden, für welches $C \frown L_{n-1}$ mindestens m *Schnitt*komponenten besitzt, so gibt es eine Umgebung $\mathfrak{u}^*$ von L_{n-1} derart, daß $C \frown L^*_{n-1}$ mindestens m Schnittkomponenten besitzt für jedes $L^*_{n-1} \in \mathfrak{u}^*$ (vgl. Nr. 2. 1. 3.). Gemäß Ziff. (I. 1) gibt es dann beliebig nahe bei L_{n-1}, also auch bei A^0, eine offene Menge $\mathfrak{u} < \mathfrak{u}^*$ derart, daß $C \frown L^*_{n-1}$ für jedes $L^*_{n-1} \in \mathfrak{u}$ endlich ist und mindestens m Schnittpunkte enthält. In bekannter Weise (vgl. z. B. [1], Nr. 1. 6.) ergibt sich jetzt die Existenz einer in R_n offenen Teilmenge $\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{u}$ derart, daß sämtliche (endlich viele) Punkte von $C \frown L''_{n-1}$ *Schnitt*punkte sind für jedes $L''_{n-1} \in \mathfrak{o}$ und daß ihre Anzahl mindestens m beträgt.

(I. 3) Gemäß Ziff. (I. 2) genügt es zum Beweise des Reduktionssatzes zu zeigen: Beliebig nahe bei A^0 existiert eine $(n-1)$-Ebene L_{n-1}, für welche $C \frown L_{n-1}$ mindestens m Schnittkomponenten besitzt. Dies kann so gezeigt werden.

(II. 1) Da C ordnungsreduzibel sein soll, existiert eine $(n-2)$-Ebene $B^1 < A^0 = L^0_{n-1}$ derart, daß höchstens eine der nicht-inneren Stützkomponenten von $D^0 = C \frown A^0$ (soweit solche vorhanden sind) fremd ist zu B^1. Wir legen eine, von A^0 verschiedene, B^1 enthaltende $(n-1)$-Ebene L^u als uneigentlich zugrunde und bezeichnen mit $(A^0; +)_n$ und $(A^0; -)_n$ die beiden von A^0 berandeten (in $P_n - L^u$ enthaltenen) Halbräume; diese Halbräume sollen hier $A^0 - L^u$ enthalten (d. h. abgeschlossen sein in $P_n - L^u$). Unter den zu B^1 fremden Komponenten von D^0 (die beschränkt bezüglich L^u sind) gebe es s Schnittkomponenten, ferner $o(+)$ bzw. $o(-)$ innere und $e(+)$ bzw. $e(-)$ nicht-innere Stützkomponenten, in denen Komponenten von $C - (A^0; +)_n$ bzw. von $C - (A^0; -)_n$ münden. Die Anzahl der zu B^1 nicht fremden Komponenten von D^0 sei q. Dabei bedeutet $s = 0, o(+) = 0$ usw., daß keine Komponenten der betrachteten Art existieren. Schließlich sei m^0 die Anzahl aller Komponenten von D^0. Es gilt dann

(m^0) $\quad m^0 = q + s + o(+) + o(-) + \bar{e}, \; 1 \leqq m^0 \leqq a,$ wobei $a = st.\, KOW(C)$ und

$(\bar{e})$ $\quad \bar{e} = e(+) + e(-)$ mit $0 \leqq \bar{e} \leqq 1$.

Setzt man

(d) $\quad d = 2o(-) + e(-)$

(g) $\quad g = 2o(+) + e(+),$

so gilt noch

(m^0) $\quad m^0 = q + s + 2^{-1}d + 2^{-1}g + 2^{-1}\bar{e}.$

Werden erforderlichenfalls $(A^0; +)_n$ und $(A^0; -)_n$ vertauscht, so wird stets

(h) $\quad d \leqq g.$

(II. 2) Gemäß Ziff. (II. 1) sei B^1 bzw. L^u als uneigentliche $(n-2)$- bzw. $(n-1)$-Ebene in A^0 bzw. in P_n gewählt. Gemäß der Definition von $s, o(+), e(+)$ und g sowie gemäß Nr. 2. 1. 3., ist für *jede*, zu A^0 hinreichend benachbarte und (bezogen auf L^u) parallele, in $(A^0; +)_n$ gelegene $(n-1)$-Ebene A^1 die Anzahl s^1 der zu B^1 fremden *Schnitt*komponenten von $D^1 = C \frown A^1$ nicht kleiner als $s + g$, also $s + g \leqq s^1$. Weil C nach Vor. Bogensumme ist, kann (gemäß Nr. 1. 5., Hilfssatz) und soll A^1 überdies folgendermaßen gewählt werden: Die zu B^1 fremden Komponenten von D^1 sind sämtlich einpunktig; die zu B^1 nicht fremden Komponenten von D^1 sind in B^1 enthalten und ihre Anzahl q^1 ist nicht kleiner als q, also $q \leqq q^1$, weil jede der q zu B^1 nicht fremden Komponenten von D^0 mindestens eine der q^1 in B^1 enthaltenen Komponenten von D^1 enthält. Für die Anzahl m der Komponenten von D^1 gilt somit $q + s + g \leqq q^1 + s^1 \leqq m^1$. Gemäß Ziff. (II. 1), (m^0) und (h), ist aber $m^0 = q + s + 2^{-1}d + 2^{-1}g + 2^{-1}\bar{e} \leqq q + s + g + 2^{-1}\bar{e} \leqq q^1 + s^1 + 2^{-1}\bar{e} \leqq m^1 + 2^{-1}\bar{e}$. Da m^0, m^1 usw. ganze Zahlen sind, ferner $0 \leqq 2^{-1}\bar{e} \leqq 2^{-1}$ ist (wegen $0 \leqq \bar{e} \leqq 1$), so folgt $m^0 \leqq q^1 + s^1 \leqq m^1$.

Zusammengefaßt: In A^1 existiert eine $(n-2)$-Ebene B^1 mit folgender Eigenschaft: Die zu B^1 fremden Komponenten von $D^1 = C \cap A^1$ sind sämtlich einpunktig und unter ihnen gibt es mindestens s^1 *Schnitt*punkte; die q^1 zu B^1 nicht fremden Komponenten von D^1 sind in B^1 enthalten; dabei ist

$$(a^0) \qquad m^0 \leqq q^1 + s^1 \leqq m^1,$$

wenn m^0 bzw. m^1 die Anzahl der Komponenten von D^0 bzw. D^1 bedeutet.

(III) Der weitere Beweis knüpft an den Grundgedanken des Induktionsschlusses im Beweis des Satzes in Nr. 1. 6. an. Wir werden nämlich, von A^1 ausgehend, schrittweise $(n-1)$-Ebenen A^t, $2 \leqq t \leqq n$, sowie in A^t enthaltene $(n-2)$-Ebenen B^t konstruieren[10]), die folgender *Induktionsannahme* genügen: Die zu B^t fremden Komponenten von $D^t = C \cap A^t$ sind sämtlich einpunktig und unter ihnen gibt es s^t Schnittpunkte; die q^t zu B^t nicht fremden Komponenten von D^t liegen sämtlich in einer, in B^t enthaltenen $(n-(t+1))$-Ebene E^t. Dabei ist

$$(a^t) \qquad m^0 \leqq q^t + s^t \leqq m^t,$$

unter m^t die Gesamtzahl der Komponenten von D^t verstanden.

Anmerkung. Spätestens für $t = n$ ist $C \cap E^t = \emptyset$, also A^t ein der in Ziff. (I. 3) gestellten Forderung genügendes L_{n-1}. Denn für $t = n$ ist E_n eine $(n-(n+1))$-Ebene also -1-dimensional, d. h. leer.

Da das in Ziff. (II. 2) konstruierte A^1 der Induktionsannahme genügt, brauchen wir zum Beweise unseres Hilfssatzes (falls nicht schon A^1 der Behauptung des Reduktionssatzes genügt) nur aus der Existenz von A^t, B^t, welche der Induktionsannahme genügen, auf die Existenz von A^{t+1}, B^{t+1} zu schließen, welche ebenfalls der Induktionsannahme Genüge leisten. Dies kann so erfolgen:

(IV) Da C ordnungsreduzibel ist (vgl. die Definition in Nr. 2. 2.), existiert eine, in E^t enthaltene, $(n-(t+2))$-Ebene E^{t+1}, sodaß höchstens eine der in E^t etwa enthaltenen, nicht-inneren Stützkomponenten von D^t fremd ist zu E^{t+1}. Es gibt dann eine, E^{t+1} aber nicht E^t enthaltende, $(n-2)$-Ebene $B^{t+1} < A^t$ mit $E^{t+1} = E^t \cap B^{t+1}$, die fremd ist zu den sämtlichen, endlich vielen, in $D^t - B^t$ gelegenen (einpunktigen) Komponenten von D^t.

Es sei nun $\underline{q}^t$ die Anzahl der zu B^{t+1} nicht fremden Komponenten von D^t; diese Komponenten sind (gemäß der Definition von B^{t+1}) in E^t enthalten. Ferner sei $\underline{s}^t$ bzw. $\underline{o}^t = \underline{o}^t(+) + \underline{o}^t(-)$ und $\underline{e}^t = \underline{e}^t(+) + \underline{e}^t(-)$ die Anzahl der zu B^{t+1} fremden, aber in E^t enthaltenen Schnitt- bzw. inneren und nicht-inneren Stützkomponenten von D^t; dabei sollen die (nicht-negativen) Zahlen $\underline{o}^t(\pm)$ bzw. $\underline{e}^t(\pm)$ die entsprechende Bedeutung besitzen, wie die $o(\pm)$ bzw. $e(\pm)$ in Ziff. (II. 1). Aus der Eigenschaft von E^{t+1} folgt übrigens, daß $0 \leqq \underline{e}^t \leqq 1$. Gemäß der Definition von $\underline{q}^t, \underline{s}^t, \underline{o}^t$ und $\underline{e}^t$ gilt $q^t = \underline{q}^t + \underline{s}^t + \underline{o}^t + \underline{e}^t$, zufolge (a^t) in Ziff. (III), also

$$(1\text{a}) \qquad m^0 \leqq \underline{q}^t + (s^t + \underline{s}^t) + \underline{o}^t + \underline{e}^t.$$

Man wende nun die in Ziff. (II. 1) und (II. 2) für A^0 und B^1 durchgeführten Überlegungen auf A^1 und B^{t+1} an; dadurch gelangt man zu einer von A^t verschiedenen und zu A^t beliebig benachbarten $(n-1)$-Ebene A^{t+1}, in der B^{t+1} enthalten ist und die folgende Eigenschaften besitzt:

(α) Jede zu B^{t+1} nicht fremde Komponente von $D^{t+1} = C \cap A^{t+1}$ ist in der $(n-(t+2))$-Ebene E^{t+1} enthalten; für ihre Anzahl q^{t+1} gilt

$$(2\text{a}) \qquad \underline{q}^t \leqq q^{t+1}.$$

[10]) Dabei ist der Fall einbegriffen, daß sich eine der in Ziff. (I. 3) gestellten Forderung genügende $(n-1)$-Ebene schon für ein $t < n$ ergibt. (Vgl. auch die im Text folgende Anmerkung.)

(β) Ferner ist jede zu B^{t+1} fremde Komponente von D^{t+1} einpunktig; und für die Anzahl s^{t+1} der Schnittpunkte unter ihnen gilt

$$(3\text{a}) \qquad s^t + \underline{s}^t + \underline{o}^t + \underline{e}^t \leqq s^t + \underline{s}^t + 2\underline{o}^t(+) + \underline{e}^t(+) + 2^{-1}\underline{e}^t \leqq s^{t+1} + 2^{-1}\underline{e}^t,$$

wobei angenommen ist, daß $2\underline{o}^t(-) + \underline{e}^t(-) \leqq 2\underline{o}^t(+) + \underline{e}^t(+)$, was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Es ist aber $q^{t+1} + s^{t+1}$ nicht größer als die Gesamtzahl m^{t+1} der Komponenten von D^{t+1}. Aus (1a), (2a) und (3a) folgt daher (wegen $0 \leqq 2^{-1}\underline{e}^t \leqq 2^{-1}$, vgl. Ziff. (II. 2))

$$(a^{t+1}) \qquad m^0 \leqq q^{t+1} + s^{t+1} \leqq m^{t+1}.$$

Somit genügen A^{t+1}, B^{t+1} und E^{t+1} der Induktionsannahme (Ziff. (III)). Damit ist der Induktionsschluß gerechtfertigt und der Reduktionssatz bewiesen.

2. 3. 1. Für *nicht-ordnungsreduzible* Kontinua vom Rang n, die Bogensummen sind und einen beschränkten schwachen Komponentenordnungswert besitzen, kann der Reduktionssatz in Nr. 2. 3. seine Gültigkeit verlieren.

Beispiel. Im euklidischen E_n mit $n \geqq 2$ seien $x_1, \ldots, x_n$ rechtwinklige kartesische Koordinaten. Die Punkte p', p'', p_0, $p_1, \ldots, p_n$ seien folgendermaßen definiert: $p' = (x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0,\ x_n = 1)$; $p'' = (x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0,\ x_n = -1)$; $p_0 = (x_1 = \cdots = x_{n-2} = 0,\ x_{n-1} = 1,\ x_n = 0)$; die $p_1, \ldots, p_n$ seien in der $(n-1)$-Ebene $E_0 = (x_n = 0)$ so gewählt, daß sie linear unabhängig sind und daß p_0 sowie $q_0 = (x_1 = \cdots = x_n = 0)$ im Innern H_i des Simplexes mit den Ecken $p_1, \ldots, p_n$ liegen (H_i gebildet in E_0). Man bezeichne nun mit S' bzw. S_0 bzw. S_ν die Strecken, deren Endpunkte sind: p' und p'' bzw. p'' und p_0 bzw. p' und p_ν, $\nu = 1, \ldots, n$. Es ist dann $B = S_0 \cup S_1 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_n$ *ein nicht-ordnungsreduzibles Kontinuum der gewünschten Art*, für welches der *Reduktionssatz nicht mehr gilt*. In der Tat: Es ist B ein Kontinuum und (endliche) Streckensumme. In E_0 sind $p_0, p_1, \ldots, p_n$ nicht-innere Stützkomponenten; aber es existiert in E_0 keine $(n-2)$-Ebene, die zu höchstens einem der $p_0, p_1, \ldots, p_n$ fremd ist, weil nämlich je n dieser Punkte linear unabhängig sind. Somit ist B nicht-ordnungsreduzibel, überdies auch von beschränktem schwachem Komponentenordnungswert. Und der Reduktionssatz gilt nicht, nämlich nicht für $L^0_{n-1} = E_0$. In der Tat: Es sei $\mathfrak{u}$ eine hinreichend kleine, im übrigen beliebige Umgebung von E_0 in R_n. Hat $E \in \mathfrak{u} - (E_0) = \mathfrak{u}'$ mit *jedem* der $S_1, \ldots, S_n$ Punkte gemeinsam, so gilt $(E_0 \frown E) \frown \bar{H}_i = \emptyset$ und folglich $S_0 \frown E = \emptyset$; daher hat $B \frown E$ die Mächtigkeit $n + 1$. Ist aber $E \in \mathfrak{u}'$ fremd zu mindestens einem der $S_1, \ldots, S_n$, so besitzt $B \frown E$ höchstens die Mächtigkeit $n + 1$. Für jedes $E \in \mathfrak{u}'$ ist daher die Mächtigkeit von $B \frown E$ höchstens $n + 1$, während $E_0 \frown B$ die Mächtigkeit $n + 2$ besitzt.

Anmerkung. Für den Fall $n = 2$ hat schon Herr Marchaud ([6], S. 79, Fußnote 2.) einen Baum mit $n + 2 = 4$ Endpunkten, die alle in einer Geraden liegen, angegeben, für welchen der Reduktionssatz (Nr. 2. 3.) nicht mehr richtig ist. Die Analyse des Marchaudschen Beispiels führte uns zu den vorstehend konstruierten für $n \geqq 3$.

Bemerkung. Trägt man von q_0 aus auf der positiven und negativen x_ν-Achse, $\nu = 1, \ldots, n$, die Strecke der Länge 1 ab, so erhält man einen Baum vom schwachen Punktordnungswert n mit einem einzigen Verzweigungspunkt; dieser besitzt die Verzweigungsordnung $2n$. Der Baum ist ein ordnungsreduzibles Kontinuum.

§ 3. Anwendungen des Reduktionssatzes.

Es sei wieder R_n der Raum der $(n-1)$-Ebenen des projektiven P_n. Ist $\mathfrak{f}$ eine Teilmenge des R_n, so kann man nach Beziehungen fragen etwa zwischen einem schwachen Punktordnungswert und dem $\mathfrak{f}$-Punktordnungswert einer Menge $M < P_n$ sowie entsprechend etwa zwischen einem schwachen Komponentenordnungswert und dem $\mathfrak{f}$-Komponentenordnungswert und anderes. Wir besprechen nachstehend ein Beispiel, in welchem die jeweils betrachteten Ordnungswerte übereinstimmen.

Zunächst erwähnen wir die folgende Verallgemeinerung des Reduktionssatzes von Herrn Marchaud (vgl. [6], S. 79, Théorème III., C.):

1. Satz. *Es sei C ein ordnungsreduzibles Kontinuum im P_n und vom Rang n. Ein schwacher* Punkt*ordnungswert von C existiere und sei beschränkt.*

Beh. *Bezeichnet $\mathfrak{f}$ die Menge aller $(n-1)$-Ebenen L_{n-1}, für welche $C \frown L_{n-1}$* keine Stütz*komponenten enthält, so gilt:* (1) *Es enthält $\mathfrak{f}$ eine in R_n dichte, offene Menge $\mathfrak{f}'$, für welche der $\mathfrak{f}'$-Punktordnungswert von C existiert und beschränkt ist.* — (2) Jeder *schwache Punktordnungswert von C ist (beschränkt und) gleich dem $\mathfrak{f}'$-Punktordnungswert von C.*

Bew. *Betr. Beh.* (1). (I) Zufolge des Satzes in Nr. 1. 7. ist C Bogensumme; die Voraussetzungen des Reduktionssatzes in Nr. 2. 3. sind daher erfüllt. — (II) Gemäß Nr. 1. 3., Satz, besitzt C außerdem beschränkten starken Komponentenordnungswert. Daher ist auch $\mathfrak{f}$-$KOW(C)$ beschränkt; es sei $\mathfrak{f}$-$KOW(C) = k''$. — (III) Gemäß des Reduktionssatzes in Nr. 2. 3. gibt es in beliebiger Nachbarschaft $\mathfrak{u}$ eines *jeden* $L' \in R_n$ eine, in $\mathfrak{f}$ enthaltene, in R_n offene Menge $\mathfrak{o}(L', \mathfrak{u})$, so daß $C \frown L$ für jedes $L \in \mathfrak{o}(L'; \mathfrak{u})$ nur einpunktige Komponenten besitzt und zwar mindestens soviele wie die Anzahl der Komponenten von $C \frown L'$ beträgt; es ist also $KOW(C; L') \leqq POW(C; L) \leqq k''$. — Die Vereinigung $\mathfrak{f}'$ aller $\mathfrak{o}(L'; \mathfrak{u})$ für alle Nachbarschaften $\mathfrak{u}$ von L' und alle $L' \in R_n$ ist offen und dicht in R_n. Außerdem existiert $\mathfrak{f}'$-$POW(C) = k' \leqq k''$. Damit ist Beh. (1) bewiesen.

Betr. Beh. (2). (IV) Aus Ziff. (III) folgt: Wählt man L' insbesondere aus $\mathfrak{f}'$ und zwar mit $POW(C; L') = k'$, so gibt es beliebig nahe bei L' eine in R_n offene Teilmenge $\mathfrak{o}''$ von $\mathfrak{f}'$, so daß $POW(C; L'') = k'$ für *jedes* $L'' \in \mathfrak{o}''$. — (V) Es sei nun $\mathfrak{w}$ diejenige in R_n dichte Menge (mit in R_n dichtem offenem Kern), welche der Definition eines beschränkten *schw.* $POW(C)$ zugrunde liegt; es sei etwa $\mathfrak{w}$-$POW(C) = k$. Wir wählen nun in Ziff. (III) das L' aus $\mathfrak{w}$ derart, daß $POW(C; L') = k$ ist. Wie in Ziff. (III) gezeigt, gibt es dann ein $L \in \mathfrak{f}'$ mit $POW(C; L') \leqq POW(C; L) \leqq k'$. Somit ist $k \leqq k'$. — (VI) Es ist aber auch $k' \leqq k$. Es sei nämlich $L' \in \mathfrak{f}'$ mit $POW(C; L') = k'$. Ferner sei $\mathfrak{o}''$ zu L' gewählt wie in Ziff. (IV). Weil $\mathfrak{w}$ dicht ist in R_n, ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}'' \frown \mathfrak{w} \neq \emptyset$ und für jedes $L \in \mathfrak{b}$ gilt $POW(C; L) = k' \leqq \mathfrak{w}$-$POW(C) = k$. — (VII) Wir haben also $k = \mathfrak{w}$-$POW(C) =$ *schw.* $POW(C) = k' = \mathfrak{f}'$-$POW(C)$; w. z. z. w.

Ferner liefert der Reduktionssatz aus Nr. 2. 3. Beispiele von Kontinuen, für die schwacher und starker Komponentenordnungswert übereinstimmen und führt damit zu einer Verschärfung des Satzes in Nr. 1. 3. Es gilt etwa der

2. Satz. Vor. *Es sei C ein ordnungsreduzibles Kontinuum vom Rang n und Bogensumme.*

Beh. *Folgende beiden Aussagen sind* gleichwertig:

(a) *Es besitzt C einen beschränkten* schwachen *(R_n-) Komponentenordnungswert k;*

(b) *Es besitzt C den beschränkten* starken *(R_n-) Komponentenordnungswert k.*

Zusatz. Aus (a) folgt, daß C einen schwachen *Punkt*ordnungswert k besitzt (vgl. Nr. 1. 7.).

Bew. *Aus* (b) *folgt* (a) gemäß den Definitionen von *st.* und *schw. KOW.* — *Aus* (a) *folgt* (b). Gemäß (a) gilt für C der Reduktionssatz (Nr. 2. 3.). Gemäß Nr. 1. 3., Satz, ist ferner *st.* $KOW(C) = k'$ beschränkt; dabei ist $k \leqq k'$. Es gibt dann eine $(n-1)$-Ebene L derart, daß $\dot{C} \frown L$ genau k' Komponenten besitzt. Gemäß des Reduktionssatzes gibt es aber beliebig nahe bei L eine offene Menge $\mathfrak{o}$ von $(n-1)$-Ebenen, so daß $C \frown L'$ für *jedes* $L' \in \mathfrak{o}$ mindestens k' (Schnitt-)Punkte enthält. Demgegenüber besagt *schw.* $KOW(C) = k$ (vgl. (a)), daß $KOW(C; L'') > k$ ist höchstens für $(n-1)$-Ebenen L'' aus einer (in R_n) nirgends dichten Menge $\mathfrak{h} < R_n$. Weil nun die offene Menge $\mathfrak{o}$ nicht nirgends dicht ist, kann nicht $k < k'$ sein. Somit ist $k = k'$, w. z. z. w.

Zusammenfassung von Satz 1. und 2. ergibt den

3. Satz. Vor. *Das ordnungsreduzible Kontinuum C vom Rang n besitze einen beschränkten schwachen Punktordnungswert, der gleich k ist.*

Beh. Jeder *beliebige schwache Punkt- und Komponentenordnungswert von C und ebenso der starke Komponentenordnungswert von C ist gleich k.*

Bew. Aus der Vor. und Nr. 1. 7., Satz, Beh. (1) und (3), folgt, daß C Bogensumme, daß also — neben Satz 1 — auch Satz 2 anwendbar ist. Ferner ist der in der Vor. von Satz 3 genannte *schw.* $POW(C)$ zugleich ein *schw.* $KOW(C)$.

Literatur.

[1] *Haupt*, Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven usw. Monatsh. f. Math. u. Phys. **40** (1933), 1—53.

[2] *Haupt*, Limessätze bei geometrischen Ordnungen. Annali di mat. pura ed appl. Bologna (4) **23** (1944), 123—148.

[3] *Haupt*, Schwache Ordnung im projektiven n-dimensionalen Raum R_n. Math. Ann. **120** (1948), 473—491.

[4] *Haupt*, Bestimmung der Kontinua im E_n ohne n richtungsabhängige Paratingenten. Bayer. Akad. d. Wiss., Sitz.-Ber. d. math.-naturw. Kl. 1956, 295—327.

[5] *F. Hausdorff*, Mengenlehre, 3. Aufl., Berlin-Leipzig 1935.

[6] *A. Marchaud*, Sur les continus d'ordre borné. Acta mathematica **55** (1930), 67—115.

[7] *K. Menger*, Kurventheorie (unter Mitarbeit v. G. Nöbeling). Leipzig 1932.

[8] *Chr. Pauc*, Sur les sommes d'arcs. En collaboration avec A. Vazsonyi. Rev. Sci. (Revue Rose), 1940, 101—103.

Eingegangen 24. November 1957.

Variationsrechnung und Integralgleichungen.

Von *Werner Schmeidler* in Berlin-Frohnau.

Einleitung.

Die Eulersche Gleichung der Variationsrechnung tritt gewöhnlich als Differentialgleichung auf. Daß sie auch die Form einer Integralgleichung annehmen kann, ist weniger geläufig und soll im folgenden genauer beleuchtet werden. Der Schwerpunkt liegt dabei in der Behandlung solcher Fälle, für welche die Existenz einer Extremalfunktion von vornherein evident gemacht werden kann, so daß damit dann die Lösbarkeit der betreffenden Integralgleichung gefolgert werden kann. Die Methode wird besonders auf algebraische Integralgleichungen angewandt und enthält als Spezialfall den Beweis der Existenz eines reellen Eigenwertes einer symmetrischen linearen Integralgleichung sowie anderer Aussagen aus dieser Theorie[1]).

§ 1.

Extremwerte ohne Nebenbedingungen.

Es sei $\Phi(y)$ ein reelles Funktional einer reellen Funktion $y(s)$. Ein Extremwert für $\Phi(y)$ kann nur angenommen werden an einer Stelle $y(s)$, für die

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Phi(y + \varepsilon\eta) - \Phi(y)}{\varepsilon} = 0 \tag{1}$$

ist für jede Wahl von $\eta(s)$; dabei soll die Existenz des Grenzwertes vorausgesetzt werden. Kann man das Vorhandensein einer Extremalfunktion y nachweisen, so hat die zugehörige Eulersche Gleichung, welche sich durch Elimination von η aus (1) ergibt, diese Extremalfunktion zur Lösung.

Wir betrachten den Fall eines Integralpolynoms, das keine freien Potenzen von $y(s)$ enthält, also einen Ausdruck der Form[2])

$$\Phi(y) = \sum_{(2 \leq \alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu \leq n+1)} \int_0^1 \cdots \int_0^1 K_{\alpha\alpha_1 \cdots \alpha_\nu}(st_1 \cdots t_\nu)\, y^\alpha(s)\, y^{\alpha_1}(t_1) \cdots y^{\alpha_\nu}(t_\nu)\, ds\, dt_1 \cdots dt_\nu$$
$$+ \int_0^1 f(s)\, y(s)\, ds \qquad (n \geqq \alpha > 0,\ n \geqq \alpha_1 \geqq 0, \ldots, n \geqq \alpha_\nu \geqq 0;\ \alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_\nu \text{ ganz}).$$

Es fragt sich, unter welchen Umständen hier über das Vorhandensein eines Extremwertes etwas ausgesagt werden kann.

---

[1]) Vgl. auch d e Abhandlung des Verf. Über symmetrische algebraische Integralgleichungen, Annalen der Finnischen Akademie der Wissenschaften, I. Mathematica-Physica, Nr. 220, Helsinki 1955. Eine dort vorhandene Unstimmigkeit wird hier bereinigt.

[2]) Daß hier das Integralglied mit $y(s)^{n+1}$ weggelassen ist, findet später seine Motivierung. — Kerne, bei denen zwei oder mehrere Indizes übereinstimmen, können in den zugehörigen Variablen als symmetrisch angenommen werden. Alle Kerne seien reell und stetig.

Wählt man für $y(s)$ eine reelle Konstante C, so hat die Potenz C^{n+1} den Koeffizienten

$$\sum_{(\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_\nu=n+1)} \int_0^1 \cdots \int_0^1 K_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_\nu}(st_1\cdots t_\nu)\, ds\, dt_1 \cdots dt_\nu.$$

Wir wollen annehmen, daß dieser Zahlwert von Null verschieden und, was dann keine Beschränkung der Allgemeinheit ist, positiv sei. Das betreffende Polynom von C nimmt dann alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ an, und das Vorhandensein eines Extremwertes ist nicht von vornherein evident, falls der Grad $n+1$ ungerade, also n gerade ist. Ist dagegen n ungerade, $n+1$ gerade, so kann man folgendermaßen schließen:

Das Aggregat Φ_m der Glieder m-ter Ordnung bezüglich y in Φ kann nach der Hölderschen Ungleichung in der Form

$$|\Phi_m(y)| \leqq K_m \int_0^1 |y(s)|^m\, ds$$

abgeschätzt werden. Ist das letztere Integral (mit $m = n+1$) größer oder gleich 1, so gilt wiederum nach Hölder

$$\int_0^1 |y(s)|^m\, ds \leqq \sqrt[\frac{n+1}{m}]{\int_0^1 |y(s)|^{\frac{n+1}{m}\cdot m}\, ds \cdot 1} = \left(\int_0^1 y^{n+1}(s)\, ds\right)^{\frac{m}{n+1}} \leqq \int_0^1 y^{n+1}(s)\, ds$$

für $m \leqq n+1$; daher ist mit einer geeigneten Konstanten $K > 0$

$$|\Phi(y)| \leqq K \cdot \int_0^1 y^{n+1}(s)\, ds, \tag{2}$$

falls

$$\|y\|^{n+1} = \int_0^1 y^{n+1}(s)\, ds \geqq 1 \tag{3}$$

ist.

Wir betrachten nun das Funktional

$$\Phi_0(y) = k \int_0^1 y^{n+1}(s)\, ds + \Phi(y)$$

mit einer Konstanten $k > K$. Dann gilt für alle $y(s)$, die der Bedingung (3) genügen:

$$|\Phi_0(y)| \geqq (k - K) \int_0^1 y^{n+1}(s)\, ds. \tag{4}$$

Wächst also das Integral (3) über alle Grenzen, so gilt dies auch von $|\Phi_0|$, dagegen bleibt dieses Funktional beschränkt für alle y mit $\|y\| \leqq 1$. Demnach hat der absolute Betrag von Φ_0 eine bestimmte untere Grenze, die für solche y, für die $\|y\|$ einen festen Wert nicht übersteigt, beliebig angenähert wird. Aber dieses Ergebnis ist trivial, das Minimum des Betrages ist Null und wird für $y = 0$ erreicht.

Wir können nun aber unter Berücksichtigung des geradzahligen Wertes von $n+1$ auch etwas aussagen über das Vorzeichen von Φ_0 für alle y mit genügend großer Norm. Ist ein solches $y(s)$ gegeben, für welches die Ungleichung (4) gilt, so kann man unter Beibehaltung der Norm die Funktion $y(s)$ in eine Konstante abwandeln, derart, daß bei dieser Umwandlung die Ungleichung (4) dauernd gültig bleibt. Dann ist aber der Wert von Φ_0

positiv, falls die Norm von y genügend groß ist, andererseits ist der Betrag von Φ_0 bei der Umwandlung dauernd oberhalb einer festen positiven Grenze geblieben, also ist Φ_0 auch vor der Umwandlung positiv gewesen. Da dies für alle y genügend großer Norm gilt, haben wir also jetzt genauer

$$\Phi_0(y) \geqq (k - K) \,\|\, y \,\|^{n+1}, \qquad \text{falls } \|\, y \,\| \geqq R.$$

Andererseits bleibt innerhalb des Bereiches $\|\, y \,\| \leqq R$ der Betrag von Φ_0 beschränkt, also Φ_0 selbst nach unten beschränkt, so daß eine bestimmte untere Grenze für Φ_0 existiert. *Ist nun ein $y(s)$ vorhanden, für welches diese untere Grenze erreicht wird*, so erhält man durch Berechnung des Grenzwertes (1) eine Bedingung der Form [3])

$$\int_0^1 \varphi(y; y)\, \eta(s)\, ds = 0 \qquad \text{für alle } \eta(s), \text{ also } \varphi(y; y) = 0,$$

wo

$$\begin{aligned} \varphi(y; y) \equiv \sum_{(2 \leqq \alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu \leqq n+1)} \int_0^1 \cdots \int_0^1 [\alpha K_{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}(st_1 \cdots t_\nu)\, y^{\alpha-1}(s)\, y^{\alpha_1}(t_1) \cdots y^{\alpha_\nu}(t_\nu) \\ + \alpha_1 K_{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}(t_1 s \cdots t_\nu)\, y^{\alpha_1 - 1}(s)\, y^{\alpha}(t_1) \cdots y^{\alpha_\nu}(t_\nu) + \cdots \\ + \alpha_\nu K_{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}(t_\nu t_1 \cdots s)\, y^{\alpha_\nu - 1}(s)\, y^{\alpha_1}(t_1) \cdots y^{\alpha}(t_\nu)]\, dt_1 \cdots dt_\nu \\ + f(s) + (n+1)\, k\, y^n(s) = 0 \qquad (0 \leqq s \leqq 1) \end{aligned} \tag{5}$$

für die entsprechende Extremalfunktion $y(s)$ ist. *Die so entstehende algebraische Integralgleichung hat dann also eine reelle Lösung $y(s)$*, die übrigens natürlich nicht identisch verschwinden kann, falls $f(s) \not\equiv 0$ ist.

Ehe wir zum Beweise für die Existenz einer Extremalfunktion übergehen, für den wir noch eine zusätzliche Diskriminantenvoraussetzung werden machen müssen, wollen wir uns an den Fällen $n = 1$ und $n = 3$ die Bedeutung des Satzes klar zu machen versuchen.

Für $n = 1$ erhalten wir

$$\Phi_0(y) = \int_0^1 \int_0^1 K(st)\, y(s)\, y(t)\, ds\, dt + \int_0^1 f(s)\, y(s)\, ds + k \int_0^1 y^2(s)\, ds \qquad (K(st) = K(ts))$$

und demgemäß die Integralgleichung (5)

$$\varphi(y; y) \equiv 2 \int_0^1 K(st)\, y(t)\, dt + f(s) + 2ky(s) = 0.$$

Diese soll also für alle genügend großen Werte von k eine reelle Lösung $y(s)$ besitzen. Dies ist tatsächlich der Fall, wenn $\frac{1}{k}$ kleiner als der kleinste Eigenwert, absolut genommen, ist, denn dann hat die zugehörige homogene Gleichung nur die triviale Lösung Null, also die Gleichung selbst eine eindeutige (reelle) Lösung.

[3]) Das fortgelassene Integralglied mit $y(s)^{n+1}$ in $\Phi(y)$ würde in $\varphi(y; y)$ zu einem Integralglied mit $y^n(t)$ führen, das nach der Fredholmschen Theorie durch Auflösung der Gleichung nach $y^n(t)$ beseitigt werden kann, wenn k genügend groß ist.

Für $n = 3$ ergibt sich[4])

$$\Phi_0(y) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 K_{1111}(st_1t_2t_3)\, y(s)\, y(t_1)\, y(t_2)\, y(t_3)\, ds\, dt_1\, dt_2\, dt_3$$
$$+ \int_0^1\int_0^1\int_0^1 K_{211}(st_1t_2)\, y^2(s)\, y(t_1)\, y(t_2)\, ds\, dt_1\, dt_2 + \int_0^1\int_0^1 K_{22}(st)\, y^2(s)\, y^2(t)\, ds\, dt$$
$$+ \int_0^1\int_0^1 K_{31}(st)\, y^3(s)\, y(t)\, ds\, dt + \int_0^1 f(s)\, y(s)\, ds + k\int_0^1 y^4(s)\, ds$$

und damit die Integralgleichung

$$\varphi(y;y) \equiv 4\int_0^1\int_0^1\int_0^1 K_{1111}(st_1\, t_2\, t_3)\, y(t_1)\, y(t_2)\, y(t_3)\, dt_1\, dt_2\, dt_3$$
$$+ 2\int_0^1\int_0^1 K_{211}(st_1\, t_2)\, y(s)\, y(t_1)\, y(t_2)\, dt_1\, dt_2$$
$$+ 2\int_0^1\int_0^1 K_{211}(t_1\, st_2)\, y^2(t_1)\, y(t_2)\, dt_1\, dt_2 + 4\int_0^1 K_{22}(st)\, y(s)\, y^2(t)\, dt$$
$$+ 3\int_0^1 K_{31}(st)\, y^2(s)\, y(t)\, dt + \int_0^1 K_{31}(ts)\, y^3(t)\, dt + f(s) + 4\, ky^3(s) = 0,$$

welche nach unserer Behauptung für alle genügend großen Werte von $k > 0$ eine reelle Lösung haben soll, falls noch eine zusätzliche Diskriminantenbedingung erfüllt ist.

Man erkennt, daß man für alle ungeraden Werte n Beispiele von algebraischen Integralgleichungen angeben kann, die als Eulersche Gleichungen eines Variationsproblems aufgefaßt werden können.

Wir wenden uns nun zu dem noch ausstehenden Beweise für die Existenz der Lösung.

Wir verwenden zur Darstellung der Funktionen $y(s)$ ein vollständiges Orthonormalsystem $w_1(s), w_2(s), \ldots$ mit der besonderen Eigenschaft, daß die Produkte und Potenzen von $w_1, w_2, \ldots, w_m$ wiederum lineare Verbindungen von $w_1, w_2, \ldots, w_m$ sein sollen. Ein solches Orthonormalsystem hat A. Haar angegeben[5]). Setzen wir demgemäß

$$y^{(m)}(s) = \sum_{\alpha=1}^{m} x_\alpha w_\alpha(s),$$

so sind auch alle Potenzen von $y^{(m)}(s)$ durch $w_1, \ldots, w_m$ darstellbar. Ferner wollen wir auch die Kernfunktionen $K_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(st_1\cdots t_\nu)$ durch Multilinearformen

$$K^{(m)}_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(st_1\cdots t_\nu) = \sum_{(\beta,\beta_1,\ldots,\beta_\nu=1,\ldots,m)} k^{(m)}_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu\,\beta\beta_1\ldots\beta_\nu}\, w_\beta(s)\, w_{\beta_1}(t_1)\cdots w_{\beta_\nu}(t_\nu)$$

approximieren, was gleichmäßig in allen Variablen mit beliebiger Genauigkeit möglich ist. Dann sind auch sämtliche Integranden in

$$\Phi_0^{(m)}(y^{(m)}) = k\int_0^1 y^{(m)^{n+1}}(s)\, ds$$
$$+ \sum_{(2\leq\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_\nu\leq n+1)} \int_0^1\cdots\int_0^1 K^{(m)}_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(st_1\cdots t_\nu)\, y^{(m)^\alpha}(s)\, y^{(m)^{\alpha_1}}(t_1)\cdots y^{(m)^{\alpha_\nu}}(t_\nu)\, ds\, dt_1\cdots dt_\nu$$
$$+ \int_0^1 f^{(m)}(s)\, y^{(m)}(s)\, ds$$

[4]) Wir lassen der Kürze halber die Glieder 3. und 2. Ordnung fort, die natürlich auch noch auftreten können.

[5]) Vgl. Mathematische Annalen 69 (1910), 331—371. Die Unstetigkeit der $w_\alpha(s)$ (sie haben nur je endlich viele Sprungstellen) stört hier nicht.

ebenfalls durch Multilinearformen in $w_1, \ldots, w_m$ darstellbar, deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen von $x_1, \ldots, x_m$ werden. Der gesamte Ausdruck $\Phi_0^{(m)}(y^{(m)})$ wird schließlich eine ganze rationale Funktion in $x_1, \ldots, x_m$, die als solche natürlich stetig differenzierbar ist. Übrigens ist diese Funktion nach unten beschränkt und besitzt daher notwendig ein Minimum, welches durch die Bedingungsgleichungen

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial x_\varrho} \Phi_0^{(m)}(y^{(m)}) = 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, m)$$

bestimmt ist. Die Rechnung liefert ein Gleichungssystem, das aussagt, daß die Fourierkoeffizienten eines gewissen Ausdrucks verschwinden, der in analoger Weise aus $y^{(m)}(s)$ und den Approximationskernen gebildet ist wie die linke Seite von (5) aus $y(s)$ und den gegebenen Kernen. Da der Ausdruck aber selbst nichts anderes als eine Linearform in $w_1(s), \ldots, w_m(s)$ sein kann, so folgt notwendig sein Verschwinden. Dies ergibt die Gleichung

$$\begin{aligned}(7) \quad & \varphi^{(m)}(y^{(m)}; y^{(m)}) \\ & \equiv \sum_{(2 \leq \alpha + \cdots + \alpha_\nu \leq n+1)} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \big[\alpha K^{(m)}_{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}(s t_1 \cdots t_\nu)\, y^{(m)^{\alpha-1}}(s)\, y^{(m)^{\alpha_1}}(t_1) \cdots y^{(m)^{\alpha_\nu}}(t_\nu) \\ & \quad + \alpha_1 K_{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}(t_1 s \cdots t_\nu)\, y^{(m)^{\alpha_1 - 1}}(s)\, y^{(m)^{\alpha}}(t_1) \cdots y^{(m)^{\alpha_\nu}}(t_\nu) \\ & \quad + \cdots + \alpha_\nu K_{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}(t_\nu t_1 \cdots s)\, y^{(m)^{\alpha_\nu - 1}}(s)\, y^{(m)^{\alpha_1}}(t_1) \cdots y^{(m)^{\alpha}}(t_\nu)\big]\, dt_1 \cdots dt_\nu \\ & \quad + f^{(m)}(s) + (n+1)\, k\, y^{(m)^n}(s) = 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat demnach notwendig eine reelle Lösungsfunktion

$$y^{(m)}(s) = \sum_{\alpha=1}^{m} x_\alpha^{(m)} w_\alpha(s).$$

Es kommt nun darauf an, durch einen geeigneten Grenzübergang hieraus eine Lösung für die Gleichung (5) zu gewinnen.

Da die Gleichungen (6) für $x_1^{(m)}, \ldots, x_m^{(m)}$ die Fourierkoeffizienten für gewisse Abschnittsminimalfunktionen bestimmen, deren zugehörige Funktionalwerte $\Phi_0^{(m)}(y^{(m)})$ naturgemäß mit wachsendem m monoton abnehmen, andererseits aber alle nach unten beschränkt sind, so gilt notwendig die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{m \to \infty} \Phi_0^{(m)}(y^{(m)}),$$

und außerdem ist klar, daß alle $|\Phi_0^{(m)}(y^{(m)})|$ gleichmäßig beschränkt sind. Da ferner, wie wir wissen, $\Phi_0(y)$ mit $\| y \| \to \infty$ über alle Grenzen wächst und da dies auch für $\Phi_0^{(m)}(y^{(m)})$ gilt, so muß notwendig $\| y^{(m)} \|$ für alle m gleichmäßig beschränkt sein. Aber auch $| y^{(m)}(s) |$ muß gleichmäßig beschränkt sein für alle s und alle m. Denn die Gleichung (7) hat Koeffizienten, die sich für genügend großes m beliebig wenig unterscheiden von den gleichgradig stetigen und nach der Hölderschen Ungleichung gleichmäßig beschränkten Integralen, in denen lediglich die $K^{(m)}_{\alpha\alpha \ldots \alpha_\nu}(s t_1 \cdots t_\nu)$ durch die $K_{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}(s t_1 \cdots t_\nu)$ ersetzt sind; daher sind auch alle $y^{(m)}(s)$ für alle m und alle s gleichmäßig beschränkt.

Um nun die Lösung des Gleichungssystems (7) eindeutig festzulegen, ist dafür zu sorgen, daß nur eine einzige reelle Lösung der algebraischen Gleichung $\varphi(t; y) = 0$ bei beliebigem y vorhanden sein soll, und zwar für alle s. Diese ist ferner eine stetige Funktion von s, falls die Diskriminante der Gleichung für alle y und alle s stets von Null verschieden ist, so daß keine mehrfache Lösung und keine Verzweigung auftreten kann. Wird diese

Voraussetzung für die Diskriminante von (5) sichergestellt, so gilt sie von selbst bei genügend großem m auch für (7). Beispielsweise ist bei $n = 3$ dafür zu sorgen, daß in der Gleichung $y^3(s) + a_1 y^2(s) + a_2 y(s) + a_3 = 0$ der Ausdruck

$$\left(\frac{a_1 a_2}{6} - \frac{a_3}{2} - \frac{a_1^3}{27}\right)^2 - \left(\frac{a_1^2}{9} - \frac{a_2}{3}\right)^3 > 0$$

wird, was durch $3a_2 > a_1^2$ erreicht ist. Dies liefert die Bedingung

$$\frac{3\left[2\int_0^1\int_0^1 K_{211}(st_1t_2)\, y(t_1)\, y(t_2)\, dt_1 dt_2 + 4\int_0^1 K_{22}(st)\, y^2(t)\, dt\right]}{4k} > \frac{\left(3\int_0^1 K_{31}(st)\, y(t)\, dt\right)^2}{16k^2}$$

oder

$$4k\left[\int_0^1\int_0^1 K_{211}(st_1t_2)\, y(t_1)\, y(t_2)\, dt_1\, dt_2 + 2\int_0^1 K_{22}(st)\, y^2(t)\, dt\right] > \frac{3}{2}\left(\int_0^1 K_{31}(st)\, y(t)\, dt\right)^2.$$

Ist jetzt die erstgenannte quadratische Integralform $> \delta_1 \int_0^1 y^2(t)\, dt$, ferner $K_{22}(st) > \delta_2$ mit $\delta_1 + 2\delta_2 > 0$, so gilt dies für alle y, wenn $4k(\delta_1 + 2\delta_2) > \frac{3}{2}\,\mathrm{Max}\int_0^1 K_{31}^2(st)\, dt$ ist. — Entsprechend ist allgemein zu verfahren.

Wählen wir nun unter den Werten m eine derartige Teilfolge aus, daß sämtliche Koeffizienten gleichmäßig gegen gewisse Grenzfunktionen konvergieren (dies ist möglich, weil jede Koeffizientenfolge[6]) aus gleichgradig stetigen und gleichmäßig beschränkten Funktionen besteht) und bezeichnen wir mit $y(s)$ die eindeutig bestimmte reelle Lösung der mit diesen Grenzfunktionen gebildeten Gleichung n-ten Grades, so ist dieses $y(s)$ Grenzwert der Teilfolge $y^{(m)}(s)$, welcher der Gleichung (7) genügt, und zwar gleichmäßig in s. Hieraus ergibt sich weiterhin, daß die Koeffizienten dieser Grenzgleichung nichts anderes sind als die ursprünglichen Kernfunktionen, zusammengesetzt mit $y(s)$, so daß die Gleichung (5) tatsächlich erfüllt ist.

Satz 1. *Jede Gleichung der Form* (5), *welche in der Gestalt* $\varphi(t; y) = 0$ *bei jeder Wahl der reellen Funktion* $y(s)$ *nur eine reelle Lösung* t *besitzt und deren Diskriminante bezüglich* t *für alle* $y(s)$ *von Null verschieden ist, kann als Eulersche Gleichung des Variationsproblems* $\Phi_0(y) = \mathrm{Min}$ *aufgefaßt werden und besitzt für einen genügend großen Wert* $k > 0$ *eine reelle Lösung* $y(s)$, *falls* $\Phi\ (C)$ *einen positiven Koeffizienten von* C^{n+1} *besitzt. Für* $n = 3$ *genügt es zu verlangen, daß die letztgenannte Bedingung erfüllt,* $k > K$ *und*

$$\int_0^1\int_0^1 K_{211}(st_1t_2)\, y(t_1)\, y(t_2)\, dt_1\, dt_2 > \delta_1 \int_0^1 y^2(t)\, dt, \quad K_{22}(st) > \delta_2, \quad (\delta_1 + 2\delta_2 > 0),$$

$$4k(\delta_1 + 2\delta_2) > \frac{3}{2}\,\mathrm{Max}\int_0^1 K_{31}^2(st)\, dt$$

ist.

Wenn man will, kann man diesen Satz auffassen als eine Verallgemeinerung der Neumannschen Reihe bei einer linearen Integralgleichung mit einem symmetrischen Kern.

---

[6]) $\Sigma \int_0^1 \cdots \int_0^1 [\alpha K_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_\nu}(st_1\cdots t_\nu)\, y^{(m)\alpha_1}(t_1)\cdots y^{(m)\alpha_\nu}(t_\nu) + \cdots]\, dt_1 \cdots dt_\nu$. Die Folge der Funktionen $f^{(m)}(s)$ strebt gleichmäßig gegen die stetige Funktion $f(s)$.

§ 2.

Extremwerte mit Nebenbedingungen.

Während im vorangehenden Paragraphen das inhomogene Problem in gewissen Fällen gelöst wurde, soll jetzt das homogene betrachtet werden. Wie in der oben zitierten Arbeit in den Finnischen Akademieberichten wollen wir unter Eigenwert einen solchen Wert $\mu = z_0(y)$ verstehen, für den die Gleichung des Grades n (ungerade Zahl)

$$(8)\quad z^n - \sum_{\beta=0}^{n-1} z^\beta \int_0^1 \cdots \int_0^1 K_\beta(st_1 \cdots t_\nu)\, y^{\beta+1}(s)\, y^{\beta+1}(t_1) \cdots y^{\beta+1}(t_\nu)\, ds\, dt_1 \cdots dt_\nu = 0$$

$$(\beta + 1)(\nu + 1) = n + 1$$

für alle $y(s)$ der Norm $\sqrt[n+1]{\int_0^1 y^{n+1}(s)\, ds} = 1$ eine größte reelle Wurzel $z_0(y)$ besitzt, die durch eine Extremaleigenschaft ausgezeichnet ist. Dann entsteht, wie dort gezeigt wurde, eine Eulersche Gleichung der Form

$$\mu^n y^n(s) - \sum_{\beta=0}^{n-1} \mu^\beta y^\beta(s) \int_0^1 \cdots \int_0^1 K_\beta(st_1 \cdots t_\nu)\, y^{\beta+1}(t_1) \cdots y^{\beta+1}(t_\nu)\, dt_1 \cdots dt_\nu = 0,$$

$$(\beta + 1)(\nu + 1) = n + 1$$

(n ungerade, K_β symmetrisch in $st_1 \cdots t_\nu$).

Für $n = 3$ erhalten wir

$$z^3 - z \int_0^1\!\!\int_0^1 K_1(st)\, y^2(s)\, y^2(t)\, ds\, dt - \int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1 K_0(st_1t_2t_3)\, y(s)\, y(t_1)\, y(t_2)\, y(t_3)\, ds\, dt_1\, dt_2\, dt_3 = 0$$

als allgemeinsten Gleichungstyp; die zugehörige symmetrische algebraische Integralgleichung wird

$$\mu^3 y^3(s) - \mu\, y(s) \int_0^1 K_1(st)\, y^2(t)\, dt - \int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1 K_0(st_1t_2t_3)\, y(t_1)\, y(t_2)\, y(t_3)\, dt_1\, dt_2\, dt_3 = 0.$$

Die Diskriminantenbedingung verlangt hier

$$\frac{1}{4}\left(\int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1 K_0(st_1t_2t_3)\, y(t_1)\, y(t_2)\, y(t_3)\, dt_1\, dt_2\, dt_3\right)^2 - \frac{1}{27}\left(\int_0^1 K_1(st)\, y^2(t)\, dt\right)^3 > 0$$

für alle normierten $y(s)$, und ist erfüllt, wenn dauernd $K_1(st) < 0$ ist.

Der Existenzbeweis für die Lösung bei allgemeinem n verläuft ganz analog wie im vorigen Paragraphen und ist auch in der zitierten Arbeit entsprechend geschildert, so daß wir ihn nicht zu wiederholen brauchen. Nur wird dort die Konvergenz der Teilfolge $y^{(m)}$ erst an den rationalen Stellen s sichergestellt, was entbehrlich ist, andererseits ist der dort dargestellte Stetigkeitsbeweis zu korrigieren. Wir können ihn am besten so wie in § 1 führen, wenn wir durch eine geeignete Voraussetzung die Eindeutigkeit der reellen Lösung $y(s)$ sicherstellen. Der Satz lautet dann wie folgt:

Satz 2. *Jede symmetrische algebraische Integralgleichung*

$$\varphi(\mu y; y) \equiv \mu^n y^n(s) - \sum_{\beta=0}^{n-1} \mu^\beta y^\beta(s) \int_0^1 \cdots \int_0^1 K_\beta(st_1 \cdots t_\nu)\, y^{\beta+1}(t_1) \cdots y^{\beta+1}(t_\nu)\, dt_1 \cdots dt_\nu = 0$$

(s. oben)

besitzt einen reellen Eigenwert μ und eine zugehörige reelle stetige normierte Eigenfunktion $y(s)$, falls die Diskriminante des Polynoms $\varphi(t; y)$ bezüglich t für alle y der Norm 1 von Null verschieden ist und falls weiterhin die Gleichung $\varphi(t; y) = 0$ für alle diese y und alle Werte s nur eine reelle Lösung t besitzt. Die Gleichung kann als Eulersche Gleichung des Variationsproblems angesehen werden, die größte reelle Wurzel der Gleichung (8) für normierte y zum Maximum zu machen.

Im Falle $n = 3$ genügt die oben angegebene Diskriminantenbedingung, um beide Voraussetzungen zu erfüllen.

Eingegangen 10. Januar 1958.

On the Bounds of a One-Parametric Family of Matrices *).

By *A. M. Ostrowsk* in Basel.

1. The upper $(\Lambda(A))$ and lower $(\lambda(A))$ bounds of a square matrix A are defined as the maximum resp. the minimum of the length $|A\xi|$ of the vector $A\xi$ for all unimodular vectors ξ of the corresponding dimension. These numbers are resp. given by the square roots of the greatest and smallest eigenvalue of the matrix AA^*.

Beyond some few types of matrices for which Λ and λ are immediately obtained, these expressions have been for the first time discussed for a non trivial case of a one-parametric family of matrices in a paper by the author some years ago [2]. The family in question was given by

$$D_\alpha^{(n)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \alpha \end{pmatrix}$$

for real α, and the discussion depended on the roots of a linear combination of two Chebyshev polynomials.

In what follows we will discuss $\Lambda(A_n)$ and $\lambda(A_n)$ for another non trivial case of a one-parametric class of $n \times n$-matrices, $A_n = A_n(\sigma)$, given by

$$A_n = \begin{pmatrix} \sigma & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \sigma & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \cdots & 1 & 0 \\ & & \mathbf{0} & & \cdots & \sigma & 1 \\ & & & & \cdots & & \sigma \end{pmatrix}.$$

For real σ, A_n has σ in the main diagonal and 1 in the first superdiagonal and 0 everywhere else. It is the basic matrix used in building up the Jordan's canonical form. We write

$$\Lambda(A_n) = \Lambda_n(\sigma), \quad \lambda(A_n) = \lambda_n(\sigma). \tag{1}$$

In the case of A_n the discussion depends again on the roots of a linear combination of two Chebyshev polynomials. However it can be in this case carried further than for $D_\alpha^{(n)}$, as $\Lambda_n(\sigma)$ and $\lambda_n(\sigma)$ turn out to be *even* functions of σ and *monotonically increasing for positiv* σ.

*) This work was performed in part on a National Bureau of Standards contract with the American University, Washington, D. C. I am indebted for discussions to Dr. E. V. Haynsworth.

2. The main results of our discussion can be summarized in the following formulae:

(2) $\Lambda_n(-\sigma) = \Lambda_n(\sigma), \quad \lambda_n(-\sigma) = \lambda_n(\sigma);$

(3) $\sigma + 1 \geqq \Lambda_n(\sigma) \geqq \operatorname{Max}(\sigma - 1, 1 - \sigma) \qquad (\sigma \geqq 0);$

(4) $\sigma + 1 \geqq \lambda_n(\sigma) > \sigma - 1 \qquad (\sigma > 1);$

(5) $\sigma^n \dfrac{1-\sigma}{1 - 2\sigma + \sigma^n} \geqq \lambda_n(\sigma) \geqq \sigma^n \dfrac{1-\sigma}{1-\sigma^n} \qquad (0 \leqq \sigma < 1);$

(6) $\Lambda_n(0) = 1, \ \Lambda_n(1) = 2\cos\dfrac{\pi}{2n+1}, \ \lambda_n(0) = 0, \ \lambda_n(1) = 2\cos\dfrac{n\pi}{2n+1};$

(7) $\lambda_n(\sigma) = \sigma - \cos\dfrac{\pi}{n+1} + \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{n-1}{2n+2}\sin^2\dfrac{\pi}{n+1} + O\left(\dfrac{1}{\sigma^2}\right) \qquad (\sigma \to \infty);$

(8) $\lambda_n(\sigma) = \sigma^n\left[1 - \sigma^2 - \dfrac{\beta_n + 1}{2}\sigma^4 - \dfrac{\beta_n + \gamma_n + 1}{2}\sigma^6 + O(\sigma^8)\right] \qquad (\sigma \downarrow 0);$

(8a) $\beta_2 = -5, \ \beta_n = -1 \ (n \geqq 3), \ \gamma_2 = 14, \ \gamma_3 = -6, \ \gamma_n = 0 \ (n \geqq 4);$

(9) $\Lambda_n(\sigma) = \sigma + \cos\dfrac{\pi}{n+2} + \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{n-1}{2n+2}\sin^2\dfrac{\pi}{n+1} + O\left(\dfrac{1}{\sigma^2}\right) \qquad (\sigma \to \infty);$

(10) $\Lambda_n(\sigma) = 1 + \sigma\cos\dfrac{\pi}{n} + \dfrac{n+2}{2n}\sigma^2\sin^2\dfrac{\pi}{n} + O(\sigma^3) \qquad (\sigma \downarrow 0).$

3. We derive first some matrix-theoretical formulae. We will make use of the special matrix $E_{\mu\nu}$, which we have already introduced in another paper ([3], p. 7). $E_{\mu\nu}$ is a square matrix of the n-th order with all elements $= 0$ with the exception of the one element in the μ-th row and the ν-th column which has the value 1. We obviously have, denoting by E the unity-matrix,

$$E = \sum_{\mu=1}^{n} E_{\mu\mu}$$

and, introducing with Aitken ([1], p. 62) the special matrix

(11) $$U = \sum_{\mu=1}^{n-1} E_{\mu\mu+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & & 0 \end{pmatrix},$$

we have

(12) $$A_n = \sigma E + U.$$

In multiplying two special matrices of the type $E_{\mu\nu}$ the following formula is fundamental and very useful

(13) $$E_{\mu\nu} E_{\sigma\varkappa} = \delta_{\nu\sigma} E_{\mu\varkappa},$$

where $\delta_{\nu\sigma}$ is Kronecker's symbol ([3], p. 7). We see in particular that the product $E_{\mu\nu}E_{\sigma\varkappa}$ is always and only $\neq 0$ if $\nu = \sigma$.

Since by (11) $U' = \sum_{\nu=1}^{n-1} E_{\nu+1\,\nu}$ we have in using (13)

(14) $$U U' = \sum_{\mu,\nu} E_{\mu\mu+1} E_{\nu+1\,\nu} = \sum_{\nu=1}^{n-1} E_{\nu\nu} = E - E_{nn},$$

and we see that $U U'$ has 0 as a simple eigenvalue and 1 as an eigenvalue with the multiplicity $n - 1$.

In particular we see that

$$\Lambda(U) = 1, \quad \lambda(U) = 0. \tag{15}$$

As to the powers of U it is known and easily to be proved from (13) that we have

$$U^{n-1} = E_{1n}, \quad U^n = 0. \tag{16}$$

Further, since $E_{1n}E_{n1} = E_{11}$ has only the eigenvalues 0 and 1, we have

$$\Lambda(U^{n-1}) = 1, \quad \lambda(U^{n-1}) = 0. \tag{17}$$

From (12) and (14) we get

$$A_n A_n' = \sigma^2 E + \sigma(U + U') + U U',$$

$$A_n A_n' - \lambda E = (\sigma^2 - \lambda + 1)E + \sigma(U + U') - E_{nn}. \tag{18}$$

4. The expression $\Lambda(A)$ satisfies the following well known relations (cf. [3] pp. 3, 4):

$$\Lambda(A + B) \leqq \Lambda(A) + \Lambda(B), \tag{19a}$$

$$\Lambda(A B) \leqq \Lambda(A)\Lambda(B), \quad \Lambda(E) = 1, \tag{19b}$$

$$\lambda(A)\Lambda(A^{-1}) = 1, \quad \Lambda(cA) = |c|\Lambda(A), \tag{19c}$$

for a scalar c.

But now (3) follows by (19a) and (19c) at once from (12) and (15). In a similar way, $\lambda_n(\sigma)$ can be discussed in using (19c). We have obviously by (16)

$$A_n^{-1} = (\sigma E + U)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{n-2} (-1)^\nu \frac{U^\nu}{\sigma^{\nu+1}} + (-1)^{n-1} \frac{E_{1n}}{\sigma^n}. \tag{20}$$

Therefore, for $\sigma > 1$ by (19a), (19b) and (17),

$$\Lambda(A^{-1}) \leqq \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma^n} < \frac{1}{\sigma - 1},$$

$$\sigma + 1 \geqq \Lambda(A) \geqq \lambda(A) > \sigma - 1,$$

that is (4).

On the other hand, for $1 > \sigma > 0$ we have from (20) by (17) and (19a), (19b)

$$\left| \Lambda(A_n^{-1}) - \frac{1}{\sigma^n} \right| \leqq \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{1}{\sigma^{\nu+1}} = \frac{1 - \sigma^{n-1}}{(1 - \sigma)\sigma^{n-1}},$$

and by (19a) and (15) it follows immediately

$$\frac{1 - 2\sigma + \sigma^n}{\sigma^n(1 - \sigma)} = \frac{1}{\sigma^n} - \frac{1 - \sigma^{n-1}}{\sigma^{n-1}(1 - \sigma)} \leqq \Lambda(A_n^{-1}) \leqq \frac{1}{\sigma^n} + \frac{1 - \sigma^{n-1}}{\sigma^{n-1}(1 - \sigma)} = \frac{1 - \sigma^n}{\sigma^n(1 - \sigma)},$$

that is, by (19c), the relation (5).

5. In order to pursue our analysis further we have now to discuss the determinant of (18). We put for $\sigma \neq 0$

$$u = \frac{\sigma^2 - \lambda + 1}{\sigma}, \quad \lambda = \sigma^2 - u\sigma + 1 \tag{21}$$

and obtain for the determinant of (18):

$$|A_n A_n' - \lambda E| = \sigma^n \left| uE + U + U' - \frac{1}{\sigma} E_{nn} \right|; \tag{22}$$

the determinant on the right can be written as

$$(23)\qquad \begin{vmatrix} u-\frac{1}{\sigma} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & u & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & u & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & u \end{vmatrix}.$$

If we now introduce the determinant

$$(24)\qquad \Delta_n(u) = \begin{vmatrix} u & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & u & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & u \end{vmatrix} = |\, uE + U + U' \,|,$$

we obtain for (23) the expression $\Delta_n(u) - \frac{1}{\sigma}\Delta_{n-1}(u)$ and therefore finally

$$(25)\qquad |\, A_n A_n' - \lambda E \,| = \sigma^n \left(\Delta_n(u) - \frac{1}{\sigma}\Delta_{n-1}(u)\right).$$

6. It is easily seen that the determinants (24) satisfy the recurrence relation

$$(26)\qquad \Delta_{n+1}(u) = u\,\Delta_n(u) - \Delta_{n-1}(u),$$

which is true for $n = 1, 2, \ldots$ if we put $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = u$. We obtain then

$$(27)\qquad \Delta_0 = 1,\ \Delta_1 = u,\ \Delta_2 = u^2 - 1,\ \Delta_3 = u^3 - 2u,\ \Delta_4 = u^4 - 3u^2 + 1, \ldots$$

In putting

$$(28)\qquad u = 2\cos\theta$$

we obtain at once from (26) and (27) the formula of Wolstenholme (cf. the references in [4], p. 401)

$$(29)\qquad \Delta_n(u) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

We see that $\Delta_n(u)$ is the n-th Chebyshev polynomial. It follows therefore by the well known formula:

$$(30)\qquad \Delta_n(u) = \binom{n}{0} u^n - \binom{n-1}{1} u^{n-2} + \binom{n-2}{2} u^{n-4} - \cdots,$$

where $\Delta_n(u)$ is odd or even in u according as n is odd or even. We have further from (29) and (28)

$$(31)\qquad \Delta_n(u) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(u + 2\cos\frac{\nu\pi}{n+1}\right).$$

The fundamental equation of $A_n A_n'$ is therefore reduced in using (21), (28) and (25), to

$$(32)\qquad \sigma\Delta_n(u) - \Delta_{n-1}(u) = 0,$$

$$(33)\qquad \frac{\sin n\theta}{\sin(n+1)\theta} = \sigma.$$

7. The solutions of (33) are obtained at once from (29) for $\sigma = 0, 1, \infty$. We have, ordering the roots increasingly:

$$(34) \qquad (\sigma = 0) \qquad x'_\nu = -2\cos\frac{\nu\pi}{n} \qquad (\nu = 1, \cdots, n-1);$$

$$(35) \qquad (\sigma = 1) \qquad x^{(0)}_\nu = -2\cos\frac{2\nu\pi}{2n+1} \qquad (\nu = 1, \cdots, n);$$

$$(36) \qquad (\sigma = \infty) \qquad x_\nu = -2\cos\frac{\nu\pi}{n+1} \qquad (\nu = 1, \cdots, n).$$

We obtain in particular for $\sigma = 1$ the smallest and greatest roots of the corresponding equation taking $\nu = 1$ and $\nu = n$. Introducing these values in (21) we obtain

$$\Lambda^2(1) = 2 + 2\cos\frac{2\pi}{2n+1} = 4\cos^2\frac{\pi}{2n+1},$$

$$\lambda^2(1) = 2 + 2\cos\frac{2n\pi}{2n+1} = 4\cos^2\frac{n\pi}{2n+1},$$

and the corresponding values given in (6) follow at once.

The values $\Lambda(0)$ and $\lambda(0)$ given in (6) follow obviously immediately from (15). But in this case $\lambda(0)$ cannot be obtained from the roots (34) since the corresponding root of the equation (32) becomes ∞.

8. We put now

$$(37) \qquad H_n(u) = \frac{\Delta_{n-1}(u)}{\Delta_n(u)},$$

and are going to represent $H_n(u)$ as a sum of simple fractions. We have from (28) and (29), x_ν being given by (36),

$$\Delta'_n(x_\nu) = \left(\frac{d\Delta_n}{d\theta}\Big/\frac{du}{d\theta}\right)_{\theta=\pi-\frac{\nu\pi}{n+1}}$$

$$= -\left(\frac{(n+1)\cos(n+1)\theta\sin\theta - \cos\theta\sin(n+1)\theta}{2\sin^3\theta}\right)_{\theta=\pi-\frac{\nu\pi}{n+1}},$$

$$(38) \qquad \Delta'_n(x_\nu) = (-1)^{n-\nu}\frac{n+1}{2\sin^2\frac{\nu\pi}{n+1}},$$

$$(39) \qquad \Delta_{n-1}(x_\nu) = \left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)_{\theta=\pi-\frac{\nu\pi}{n+1}}$$

$$= \frac{\sin n\left(\pi - \frac{\nu\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\pi - \frac{\nu\pi}{n+1}\right)} = (-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{n\nu\pi}{n+1}}{\sin\frac{\nu\pi}{n+1}} = (-1)^{n-\nu}.$$

We obtain therefore

$$(40) \qquad H_n(u) = \frac{2}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin^2\frac{\nu\pi}{n+1}}{u - x_\nu}.$$

In applying (38) to $n-1$ instead of n and to x'_ν instead of x_ν we obtain

$$(41) \qquad \Delta'_{n-1}(x'_\nu) = \frac{(-1)^{n-\nu-1}n}{2\sin^2\frac{\nu\pi}{n}}.$$

Further, in replacing n by $n-1$ in (39) and x_ν by x'_ν we have

$$\Delta_{n-2}(x'_\nu) = (-1)^{n-\nu-1}, \tag{42}$$

and if we apply now (26) in replacing there n by $n-1$ and u by x'_ν we get

$$\Delta_n(x'_\nu) = -\Delta_{n-2}(x'_\nu) = (-1)^{n-\nu}. \tag{43}$$

Since x'_ν are the roots of the numerator of $H_n(u)$, it follows then

$$\lim_{u \to x'_\nu} \frac{H_n(u)}{u - x'_\nu} = \frac{-n}{2 \sin^2 \frac{\nu\pi}{n}}. \tag{44}$$

9. We have from (40)

$$H'_n(u) = -\frac{2}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\sin \frac{\nu\pi}{n+1}}{u - x_\nu} \right)^2 < 0 \tag{45}$$

and we see that $H_n(u)$ is *monotonically decreasing* in each intervall between two consecutive poles. It follows that the value of $H_n(u)$ decreases continuously from ∞ to $-\infty$ if x runs through $(x_\nu, x_{\nu+1})$ for $\nu = 1, 2, \cdots, n-1$ and $H_n(u)$ assumes therefore in each of these intervalls any given value σ exactly once. Further, if u runs through (x_n, ∞), $H_n(u)$ decreases continuously from ∞ to 0 and assumes in this intervall every positive value σ exactly once. We obtain therefore for $\sigma > 0$ exactly n functions $U_n(\sigma)$ satisfying the equation (32) and

$$x_{\nu+1} > U_\nu(\sigma) > x_\nu \quad (\nu = 1, \cdots, n), \quad \infty > U_n(\sigma) > x_n, \tag{46}$$

and each of these functions is monotonically decreasing.

On the other hand, since one of the polynomials Δ_n, Δ_{n-1} is odd and the other even, for any solution $U(\sigma)$ of the equation (32), the function $-U(-\sigma)$ is also a solution. Therefore, denoting the roots of (32) by $u_1, \cdots, u_n$,

$$\Lambda_n^2(\sigma) = \operatorname*{Max}_{\nu=1,\ldots,n} (\sigma^2 - u_\nu\sigma + 1), \quad \lambda_n^2(\sigma) = \operatorname*{Min}_{\nu=1,\ldots,n} (\sigma^2 - u_\nu\sigma + 1)$$

are *even functions* of σ. This proves (2).

By (46) we have $U_1(\sigma) < x_2 = -2\cos\frac{2\pi}{n+1}$ which is $\leqq 0$ for $n \geqq 3$. And for $n = 2$ we have from (32), $U_1(\sigma) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma} - \sqrt{\frac{1}{\sigma^2} + 4}\right) < 0$.

Further, for $\sigma > 0$, $-\sigma U_1(\sigma)$ is monotonically increasing and so is

$$\Lambda_n^2(\sigma) = \sigma^2 - \sigma U_1(\sigma) + 1.$$

It follows that for $\sigma > 0$, $\Lambda(\sigma)$ *is monotonically increasing.*

As by (2) and (19c), $\frac{1}{\lambda_n(\sigma)} = \frac{1}{\lambda_n(-\sigma)}$ is Λ of the matrix

$$-(-\sigma E + U)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{U^\nu}{\sigma^{\nu+1}}$$

with non negative elements, $\frac{1}{\lambda_n(\sigma)}$ is monotonically decreasing with the increasing $\sigma > 0$; we see that $\lambda_n(\sigma)$ is *monotonically increasing* with σ.

10. We are now going to discuss the asymptotic behavior of $\Lambda_n(\sigma)$ and $\lambda_n(\sigma)$ for $\sigma \to \infty$. We have obviously

$$\Lambda_n(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 + 1 - \sigma U_1(\sigma)}, \quad \lambda_n(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 + 1 - \sigma U_n(\sigma)}, \tag{47}$$

where

$$x_1 < U_1(\sigma) < x_2, \quad x_n < U_n(\sigma) < \infty \tag{48}$$

and with $\sigma \to \infty$,

$$U_1(\sigma) \to x_1, \quad U_n(\sigma) \to x_n.$$

Here the differences $U_1(\sigma) - x_1$, $U_n(\sigma) - x_n$ are developable in positive integer powers of $\frac{1}{\sigma}$, since (32) has n *different* roots at $\sigma = \infty$. But then, if we introduce in (40) $u = U_1(\sigma)$, $H_n(u) = \sigma$ and multiply by $\frac{n+1}{2}(U_1(\sigma) - x_1)$, we get

$$\frac{n+1}{2}\sigma(U_1 - x_1) = \sin^2\frac{\pi}{n+1} + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{U_1 - x_1}{U_1 - x_\nu}\sin^2\frac{\nu\pi}{n+1} = \sin^2\frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

$$\sigma U_1(\sigma) = x_1\sigma + \frac{2}{n+1}\sin^2\frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

and in the same way, as $\sin\frac{n\pi}{n+1} = \sin\frac{\pi}{n+1}$,

$$\sigma U_n(\sigma) = x_n\sigma + \frac{2}{n+1}\sin^2\frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Introducing these values in (47) we get in using

$$(1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} - \frac{5z^4}{128} + \frac{7z^5}{256} - \cdots, \tag{49}$$

$$\frac{\Lambda_n(\sigma)}{\sigma} = \left[1 - \frac{x_1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}\left(1 - \frac{2}{n+1}\sin^2\frac{\pi}{n+1}\right) + O\left(\frac{1}{\sigma^3}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{x_1}{2\sigma} + \frac{1}{2\sigma^2}\left(1 - \frac{2}{n+1}\sin^2\frac{\pi}{n+1}\right) - \frac{x_1^2}{8\sigma^2} + O\left(\frac{1}{\sigma^3}\right).$$

Putting here $x_1 = -2\cos\frac{\pi}{n+1}$ we obtain at once (9).

In the same way, since $x_n = -2\cos\frac{n\pi}{n+1}$, (7) is obtained.

11. We consider now the behavior of $\Lambda_n(\sigma)$ with $\sigma \downarrow 0$. In this case we have in (48) $U_1(\sigma) \to x_1'$ and the difference $U_1(\sigma) - x_1'$ is developable in positive integer powers of σ since the equation (32) has for $\sigma = 0$ no double roots. In specializing (44) for $\nu = 1$ and in replacing there u by $U_1(\sigma)$ we obtain therefore

$$\frac{\sigma}{U_1(\sigma) - x_1'} = \frac{-n}{2\sin^2\frac{\pi}{n}} + O(\sigma),$$

$$\sigma U_1(\sigma) = x_1'\sigma - \frac{2}{n}\sigma^2\sin^2\frac{\pi}{n} + O(\sigma^3).$$

Here we replace x_1' by $-2\cos\frac{\pi}{n}$ and obtain from (47)

$$\Lambda_n^2(\sigma) = 1 + 2\sigma\cos\frac{\pi}{n} + \sigma^2\left(1 + \frac{2}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}\right) + O(\sigma^3),$$

and from here at once (10).

12. We consider finally the asymptotic behavior of $\lambda(\sigma)$ with $\sigma \downarrow 0$. We have in squaring (5) and in using (47)

$$\lambda_n^2(\sigma) = \sigma^2 - \sigma U_n(\sigma) + 1 = \sigma^{2n} + O(\sigma^{2n+1}),$$

$$U_n(\sigma) = \frac{1}{\sigma} + \sigma - \sigma^{2n-1} + O(\sigma^{2n}) \qquad (\sigma \downarrow 0). \tag{50}$$

Here $U_n(\sigma) - \frac{1}{\sigma}$ is developable in positive integer powers of σ for small positive σ as none of the roots of the equation (32) becomes double root with $\sigma \downarrow 0$. In particular $U_n(\sigma)$ is the only root of (32) which becomes ∞ with $\sigma \downarrow 0$.

On the other hand as has been observed at the end of no. 9, $-U_n(-\sigma)$ is also a root of (32) becoming infinite with $\sigma \downarrow 0$ and we obtain

$$-U_n(-\sigma) = U_n(\sigma),$$

that is to say, the development of $U_n(\sigma)$ in the neighborhood of $\sigma = 0$ contains only odd powers of n.

We will denote generally for $\sigma > 0$ and any natural n by $X_n(\sigma)$ the greatest root of $H_n(u) = \sigma$. $X_n(\sigma)$ is for any n what has been denoted by $U_n(\sigma)$. We have with $\sigma \downarrow 0$:

$$X_n(\sigma) = \frac{1}{\sigma} + \sigma - \sigma^{2n-1} + \alpha_n\sigma^{2n+1} + \beta_n\sigma^{2n+3} + \gamma_n\sigma^{2n+5} + O(\sigma^{2n+7}), \tag{51}$$

and are going now to obtain the values of α_n, β_n and γ_n.

For $n = 2$ the equation (32) becomes

$$\sigma(u^2 - 1) - u = 0$$

and we have, taking the root becoming ∞ with $\sigma \downarrow 0$,

$$u = \frac{1}{2\sigma}\left(1 + \sqrt{1 + 4\sigma^2}\right)$$

and in using (49)

$$X_2(\sigma) = \frac{1}{\sigma} + \sigma - \sigma^3 + 2\sigma^5 - 5\sigma^7 + 14\sigma^9 + O(\sigma^{11}).$$

We obtain

$$\alpha_2 = 2, \quad \beta_2 = -5, \quad \gamma_2 = 14. \tag{52}$$

13. In order to obtain the recurrence relations for α_n, β_n and γ_n, we write (26) for $n-1$ instead of n and divide on both sides by $\Delta_{n-1}(u)$; then we obtain in using (37),

$$\frac{1}{H_n} = u - H_{n-1}. \tag{53}$$

Replace in (53) u by $X_n(\sigma)$; then we obtain since $H_n(X_n(\sigma)) = \sigma$,

$$\begin{aligned} X_n(\sigma) - H_{n-1}(X_n(\sigma)) &= \frac{1}{\sigma}, \\ H_{n-1}(X_n(\sigma)) &= X_n(\sigma) - \frac{1}{\sigma}. \end{aligned} \tag{54}$$

If we put now

$$(55)\quad \varepsilon = X_n(\sigma) - \frac{1}{\sigma} = \sigma - \sigma_{2n-1} + \alpha_n \sigma^{2n+1} + \beta_n \sigma^{2n+3} + \gamma_n \sigma^{2n+5} + O(\sigma^{2n+7}),$$

we see that ε is positive for a small positive σ and tends to 0 with $\sigma \downarrow 0$. We obtain therefore from (54)

$$X_n(\sigma) = X_{n-1}(\varepsilon),$$

and subtracting on both sides $\frac{1}{\sigma}$,

$$(56)\quad \varepsilon = \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\sigma}\right) + \varepsilon - \varepsilon^{2n-3} + \alpha_{n-1}\varepsilon^{2n-1} + \beta_{n-1}\varepsilon^{2n+1} + \gamma_{n-1}\varepsilon^{2n+3} + O(\varepsilon^{2n+5}).$$

We introduce in (56) the expression of ε from (55) dropping all terms containing σ^{2n+5} and higher powers of σ. We can assume $n \geqq 3$ and therefore any term divisible by σ^{4n-1} can also be dropped. We obtain easily from (55)

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\sigma} + \sigma^{2n-3} - \alpha_n \sigma^{2n-1} - \beta_n \sigma^{2n+1} - \gamma_n \sigma^{2n+3} + \sigma^{4n-5} - 2\alpha_n \sigma^{4n-3},$$

further

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{2n-3} &= \sigma^{2n-3} - (2n-3)\sigma^{4n-5} + (2n-3)\alpha_n \sigma^{4n-3},\\
\varepsilon^{2n-1} &= \sigma^{2n-1} - (2n-1)\sigma^{4n-3},\\
\varepsilon^{2n+1} &= \sigma^{2n+1},\\
\varepsilon^{2n+3} &= \sigma^{2n+3}.
\end{aligned}$$

Introducing these expressions in (56) and subtracting on both sides ε we obtain

$$\begin{aligned}(57)\quad &(\alpha_{n-1} - \alpha_n)\sigma^{2n-1} + (\beta_{n-1} - \beta_n)\sigma^{2n+1} + (\gamma_{n-1} - \gamma_n)\sigma^{2n+3}\\
&+ (2n-2)\sigma^{4n-5} - (2n-1)(\alpha_{n-1} + \alpha_n)\sigma^{4n-3} + O(\sigma^{2n+5}) = 0.\end{aligned}$$

14. In neglecting on both sides of (57) all terms containing σ^{2n+1}, we obtain since $4n - 5 \geqq 2n + 1$, $\alpha_{n-1} = \alpha_n$, that is

$$\alpha_n = 2 \qquad (n \geqq 2).$$

Introducing this value in (57) we have

$$\begin{aligned}(58)\quad &(\beta_{n-1} - \beta_n)\sigma^{2n+1} + (\gamma_{n-1} - \gamma_n)\sigma^{2n+3}\\
&+ (2n-2)\sigma^{4n-5} - (8n-4)\sigma^{4n-3} + O(\sigma^{2n+5}) = 0.\end{aligned}$$

For $n = 3$ and $n = 4$ this gives

$$\begin{aligned}
&(\beta_2 - \beta_3)\sigma^7 + (\gamma_2 - \gamma_3)\sigma^9 + 4\sigma^7 - 20\sigma^9 + O(\sigma^{11}) = 0,\\
&(\beta_3 - \beta_4)\sigma^9 + (\gamma_3 - \gamma_4)\sigma^{11} + 6\sigma^{11} - 28\sigma^{13} + O(\sigma^{13}) = 0,
\end{aligned}$$

and therefore

$$\begin{aligned}
\beta_3 &= \beta_2 + 4 = -1, & \gamma_3 &= \gamma_2 - 20 = -6,\\
\beta_4 &= \beta_3 = -1, & \gamma_4 &= \gamma_3 + 6 = 0.
\end{aligned}$$

Assuming now $n > 4$ we have $4n - 5 \geqq 2n + 5$, it follows therefore

$$\beta_{n-1} = \beta_n = -1, \quad \gamma_{n-1} = \gamma_n = 0 \qquad (n > 4).$$

These are the values given in (8a), while on the other hand in using (51) we have

$$\lambda_n(\sigma) = \sigma^n [1 - \alpha_n \sigma^2 - \beta_n \sigma^4 - \gamma_n \sigma^6 + O(\sigma^8)]^{\frac{1}{2}}$$

and by (50) the expression (8) follows.

All results indicated in no. 2 now are proved.

References.

[1] *A. C. Aitken* and *H. W. Turnbull*, An introduction to the theory of canonical matrices (1950).
[2] *A. Ostrowski*, On the spectrum of a one-parametric family of matrices. Journal f. d. r. u. a. Math. 193 (1954), 143–160.
[3] *A. Ostrowski*, Über Normen von Matrizen. Math. Zeitschr. 63 (1955), 2–18.
[4] *Th. Muir*, The theory of determinants. Vol. IV (1923).

Eingegangen 21. Januar 1958.

A Sufficient Condition for an Integral Operator to Have a Trace [1]).

By *W. Forrest Stinespring* in Princeton.

1. Introduction. The object of this paper is to give some sufficient conditions that an integral operator be of trace class. Let X and Y be measure spaces with measures μ and ν respectively. If K is a square-integrable function on $Y \times X$, then the operator T, given by the formula

$$(Tf)(y) = \int K(y, x) f(x) \, d\mu(x),$$

is a Hilbert-Schmidt operator. The question under consideration is: When does T have the stronger property of being of trace class? We shall concern ourselves with the case when X, at least, is a manifold, and the conditions on K will be of a smoothness type. An example of such a theorem is provided by Bernstein's theorem on the absolute convergence of a Fourier series ([4], section 6.3). This theorem says that if f is a function on the real numbers modulo 2π that satisfies a Lipschitz condition of order $> \frac{1}{2}$, then its Fourier series converges absolutely. The same conclusion may be stated in other words by saying that the integral operator with kernel $f(y - x)$ is of trace class. We obtain theorems which generalize Bernstein's theorem. These theorems yield a theorem about absolute convergence of Fourier series for compact Lie groups, which in turn implies Bernstein's theorem. This theorem is sharper for compact groups than the results in [3].

2. Trace class. A bounded operator T from one Hilbert space to another is said to be *Hilbert-Schmidt* if for some (and hence for every) orthonormal basis $\{e_\alpha\}$ of the domain, $\Sigma_\alpha \| Te_\alpha \|^2 < +\infty$. Its Hilbert-Schmidt norm $\| T \|_2$ is $(\Sigma_\alpha \| Te_\alpha \|^2)$; this norm is independent of the choice of basis $\{e_\alpha\}$. An operator is said to be of *trace class* if it is the product of two Hilbert-Schmidt operators. If T is an operator of trace class from a Hilbert space to itself, then for any orthonormal basis $\{e_\alpha\}$ of the space, the sum of the diagonal matrix entries $\Sigma_\alpha (Te_\alpha, e_\alpha)$ converges absolutely and is a number, independent of the choice of basis, called the trace of T and denoted by tr T. It should be noted that it is meaningful to speak of an operator of trace class from one Hilbert space to another, whereas the trace of an operator of trace class makes sense only for an operator from a Hilbert space into itself. If T is a Hilbert-Schmidt operator, so is its adjoint T^*, and $\| T \|_2^2 = \| T^* \|_2^2 = \operatorname{tr} T^* T = \operatorname{tr} TT^*$. If T is an operator of trace class, so are $(T^* T)^{\frac{1}{2}}$ and $(TT^*)^{\frac{1}{2}}$; the trace norm $\| T \|_1$ of T is the common non-negative value of the traces of $(T^* T)^{\frac{1}{2}}$ and $(TT^*)^{\frac{1}{2}}$. If S and T are Hilbert-Schmidt operators such that ST makes sense then $\| ST \|_1 \leqq \| S \|_2 \| T \|_2$.

Lemma 1. *Let $\{e_\alpha\}$ be an orthonormal basis of a Hilbert space $\mathfrak{H}$. Let T be a bounded linear transformation from $\mathfrak{H}$ to another Hilbert space. If*

$$\sum_\alpha \| Te_\alpha \| < +\infty,$$

[1]) This paper was written while the author was a National Science Foundation fellow.

then T is of trace class and

$$\| T \|_1 \leqq \sum_\alpha \| Te_\alpha \| .$$

Proof. Let A and B be operators defined as follows:

$$Ae_\alpha = \begin{cases} \| Te_\alpha \|^{-\frac{1}{2}} Te_\alpha & \text{if } Te_\alpha \neq 0 \\ 0 & \text{if } Te_\alpha = 0 ; \end{cases}$$

$$Be_\alpha = \| Te_\alpha \|^{\frac{1}{2}} e_\alpha .$$

Then both A and B are Hilbert-Schmidt and $T = AB$. Also

$$\| T \|_1 \leqq \| A \|_2 \| B \|_2 = \sum_\alpha \| Te_\alpha \| .$$

However, for a fixed choice of basis $\{e_\alpha\}$, the sufficient condition given in lemma 1 is not necessary, as may be seen by examining projections of rank 1 on $\mathfrak{H}$:

$$Px = (x, a) a \quad \text{where } \| a \| = 1 .$$

Such a projection is always of trace class. But $\| Pe_\alpha \| = | (e_\alpha, a) | = | a_\alpha |$ where $a = \Sigma a_\alpha e_\alpha$. The numbers $| a_\alpha |$ are arbitrary non-negative real numbers subject to the condition $\Sigma | a_\alpha | \xi^2 = 1$; and so $\Sigma | a_\alpha |$ is not necessarily finite.

3. Absolutely convergent Fourier series and trace class. Let M be a measure space with the measure μ, and let $\mathfrak{H}$ be a Hilbert space. By $L_2(M, \mu; \mathfrak{H})$, or $L_2(M, \mathfrak{H})$ if μ is clear from the context, we shall mean the set of all strongly measurable ([2], definition 3.2.4) functions k from M to $\mathfrak{H}$ that are square-integrable; i. e., such that $\| k \|_2^2 = \int \| k(x) \|^2 d\mu(x)$ is finite. Any k in $L_2(M, \mathfrak{H})$ gives rise to a bounded linear transformation T from $L_2(M)$ into $\mathfrak{H}$ as follows:

$$Tf = \int f(x) k(x) d\mu(x).$$

The adjoint transformation from $\mathfrak{H}$ into $L_2(M)$ is given by the formula:

$$(T^* v)(x) = (v, k(x)).$$

Let $\{e_\alpha\}$ be an orthonormal basis for $\mathfrak{H}$. Then

$$\sum_\alpha \| T^* e_\alpha \|_2^2 = \sum_\alpha \int | (e_\alpha, k(x)) |^2 d\mu(x)$$
$$= \int \sum_\alpha | (e_\alpha, k(x)) |^2 d\mu(x) = \int \| k(x) \|^2 d\mu(x),$$

since actually only a countable number of α's are involved because k is almost separably valued ([2], theorem 3.2.2). Consequently, T^* and also T are Hilbert-Schmidt operators, and

$$\| T \|_2^2 = \| T^* \|_2^2 = \int \| k(x) \|^2 d\mu(x).$$

Every transformation of rank 1 comes from such a k: if $Tf = (f, g) v$ where g is in $L_2(M)$ and v is in $\mathfrak{H}$, then $k(x) = \overline{g(x)} v$ gives rise to T. The completeness of $L_2(M, \mathfrak{H})$ now implies that every Hilbert-Schmidt transformation arises in this way.

Let R^n be Euclidean n-space, let $\mathfrak{H}$ be a Hilbert space, and let k be a function in $L_2(R^n, \mathfrak{H})$ whose support is contained in a cube of side 2π with edges parallel to the coordinate axes. Whenever the symbol $L_2(R^n, \mathfrak{H})$ or $L_2(R^n)$ occurs, it is to be understood that the measure involved is Lebesgue measure. For each n-tuple of integers ν, we shall call the vector

$$c = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} k(x) e^{-i\nu \cdot x} dx$$

the νth Fourier coefficient of k. If $\Sigma_\nu \| c_\nu \|$ is finite, we shall say that k has an absolutely convergent Fourier series.

Theorem 1. *Let R^n be Euclidean n-space, and let μ be a regular measure on R^n of the form $d\mu(x) = \varrho(x)dx$ where ϱ is a bounded measurable function. Let $\mathfrak{H}$ be a Hilbert space, and let k be a function in $L_2(R^n, \mathfrak{H})$ whose support is contained in a cube of side 2π with edges parallel to the coordinate axes. If k has an absolutely convergent Fourier series, then the transformation T from $L_2(R^n, \mu)$ to $\mathfrak{H}$ given by*

$$Tf = \int f(x)\, k(x)\, d\mu(x)$$

is of trace class with $\| T \|_1 \leqq (2\pi)^{\frac{n}{2}} \| \varrho \|_\infty^{\frac{1}{2}} \sum_\nu \| c_\nu \|$ where the c_ν are the Fourier coefficients of k.

Proof. The transformation T' from $L_2(R^n)$ to $\mathfrak{H}$ given by

$$T'f = \int f(x)\, k(x)\, dx$$

is of trace class according to lemma 1, and

$$\| T' \|_1 \leqq (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum_\nu \| c_\nu \| .$$

Let S be the transformation from $L_2(R^n, \mu)$ to $L_2(R^n)$ given by $Sf = \varrho f$. Since

$$\| Sf \|^2 = \int | \varrho(x) f(x) |^2 dx \leqq \| \varrho \|_\infty \int | f(x) |^2 d\mu(x),$$

the operator bound of S is $\leqq \| \varrho \|_\infty^{\frac{1}{2}}$. But $T = T'S$; consequently T is also of trace class and $\| T \|_1 \leqq (2\pi)^{\frac{n}{2}} \| \varrho \|_\infty^{\frac{1}{2}} \Sigma_\nu \| c_\nu \|$.

An especially important case of theorem 1 is when $\varrho = 1$ and $\mathfrak{H}$ is itself $L_2(R^n)$. The function k may be specified by a square-integrable kernel function $K(y, x)$ on $R^n \times R^n$; k is then the function $x \to K(\cdot, x)$ from R^n to $L_2(R^n)$. The condition given in theorem 1 may fail for $K(y, x)$, but work for the adjoint kernel $\overline{K(x, y)}$. Suppose, for example, $K(y, x) = f(y)\, g(x)$, where f and g are both in $L_2(R^n)$, and f has an absolutely convergent Fourier series, but g does not. The function $x \to g(x)\, f$ does not have an absolutely convergent Fourier series, whereas the function $x \to \overline{f(x)}\, g$ does.

4. Use of a sufficient condition for absolutely convergent Fourier series. Let $\mathfrak{H}$ be a Hilbert space, and let k be a function in $L_2(R^n, \mathfrak{H})$ whose support is contained in a cube of side 2π with edges parallel to the coordinate axes. One condition which insures that k has an absolutely convergent Fourier series is that

$$\sum_\nu | \nu |^{2\lambda} \| c_\nu \|^2 < +\infty \quad \text{for some } \lambda > \frac{n}{2},$$

where the c_ν are the Fourier coefficients of k, and $| \nu | = (\nu_1^2 + \cdots + \nu_n^2)^{\frac{1}{2}}$, ν being $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$. A necessary and sufficient condition for this is essentially classical. We shall say that a derivative $\dfrac{\partial k}{\partial x_j}$ exists in the mean if the difference quotient $[k(x_1, \ldots, x_j + \delta, \ldots, x_n) - k(x)]/\delta$ has a limit in $L_2(R^n, \mathfrak{H})$ as $\delta \to 0$; this limit is denoted by $\dfrac{\partial k}{\partial x_j}$. The νth Fourier coefficient of $\dfrac{\partial k}{\partial x_j}$ is $-i\nu_j c_\nu$. Consequently,

$$(2\pi)^{2n} \sum_\nu \nu_j^2 \| c_\nu \|^2 = \int \left\| \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\|^2 dx < +\infty.$$

Conversely, if this sum converges, then $\frac{\partial k}{\partial x_j}$ exists in the mean. From these facts it follows that if k has mean derivatives up through order r, then

$$\sum_{\nu} |\nu|^{2r} \| c_\nu \|^2 \leqq A \{\mathfrak{A}^r(k)\}^2 < +\infty$$

where A is independent of k, and we define

$$\mathfrak{A}^r(k) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \int \left\| \frac{\partial^r k}{\partial x_j^r} \right\|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

We shall say that a function with mean derivatives up through order r is of class $\mathfrak{A}^r$. Also it is clear that

$$\sum_{D} \int \| Dk \|^2 dx \leqq A' \sum_{\nu} (1 + |\nu|^{2r}) \| c_\nu \|^2$$

where D runs over all partial derivatives of order $\leqq r$ and A' is independent of k. Consequently,

$$\sum_{D} \int \| Dk \|^2 dx \leqq B [\| k \|^2 + \{\mathfrak{A}^r(k)\}^2]$$

where B is independent of k, and the range of summation is the same as before. This is lemma 1.2 in [1]. For the case when λ is not an integer, the following formula is relevant. It holds when $0 < \vartheta < 1$.

$$\int_{R^n} \int_{R^n} \frac{\| k(x+h) - k(x) \|^2}{|h|^{2\vartheta+n}} dx\, dh$$

$$= 4 \cdot (2\pi)^{2n} \sum_{\nu} |\nu|^{2\vartheta} \| c_\nu \|^2 \int_{R^n} \frac{1}{|h|^{2\vartheta+n}} \sin^2 \frac{h_1}{2} dh$$

where h_1 is the first component of h. If k has mean derivatives up through order r, and

$$\mathfrak{A}^{r+\vartheta}(k) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \int_{R^n} dh \int_{R^n} \frac{1}{|h|^{2\vartheta+n}} \left\| \frac{\partial^r}{\partial x_j^r} [k(x+h) - k(x)] \right\|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

is finite, we shall say that k is of class $\mathfrak{A}^{r+\vartheta}$. The above formula shows that $\Sigma_\nu |\nu|^{2\lambda} \| c_\nu \|^2$ is finite if and only if k is of class $\mathfrak{A}^\lambda$ and

$$\sum_{\nu} |\nu|^{2\lambda} \| c_\nu \|^2 \leqq A \{\mathfrak{A}^\lambda(k)\}^2$$

where A is independent of k. Also it is clear that

$$\sum_{D} \int \| Dk \|^2 dx \leqq A' \sum_{\nu} (1 + |\nu|^{2\lambda}) \| c_\nu \|^2$$

where D runs over all partial derivatives of order $\leqq [\lambda]$ and A' is independent of k. Consequently,

$$\sum_{D} \int \| Dk \|^2 dx \leqq B [\| k \|_2^2 + \{\mathfrak{A}^\lambda(k)\}^2]$$

where B is independent of k, and the range of summation is the same as before. Furthermore if $\lambda' < \lambda$, then $\mathfrak{A}^{\lambda'}(k) \leqq B' [\| k \|_2 + \mathfrak{A}^\lambda(k)]$.

A sufficient condition for k to be of class $\mathfrak{A}^{r+\vartheta}$ is that k have mean derivatives up through order r and that its unmixed r^{th} derivatives satisfy a mean Lipschitz condition of order $\vartheta' > \vartheta$; that is, that

$$\int_{R^n} \left\| \frac{\partial^r}{\partial x_j^r} [k(x+h) - k(x)] \right\|^2 dx \leqq A |h|^{2\vartheta'}$$

where A is independent of h. Under these circumstances we shall say that k is of class $\mathfrak{K}^{r+\vartheta'}$, and write

$$\mathfrak{K}^{r+\vartheta'}(k) = \left\{ \sup_{\substack{h \in R^n \\ 1 \leq j \leq n}} \frac{1}{|h|^{2\vartheta'}} \int_{R^n} \left\| \frac{\partial^r}{\partial x_j^r} [k(x+h) - k(x)] \right\|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Then $\mathfrak{A}^{r+\vartheta}(k) \leqq B[\| k \|_2 + \mathfrak{K}^{r+\vartheta'}(k)]$ where B is independent of k.

The preceding discussion, together with theorem 1, has established the following theorem:

Theorem 2. *Let R^n be Euclidean n-space, and let μ be a regular measure on R^n of the form $d\mu(x) = \varrho(x)\, dx$ where ϱ is a bounded measurable function. Let $\mathfrak{H}$ be a Hilbert space, let k be a function in $L_2(R^n, \mathfrak{H})$ with compact support, and let T be the transformation from $L_2(R^n, \mu)$ to $\mathfrak{H}$ given by*

$$Tf = \int f(x)\, k(x)\, d\mu(x).$$

The following conditions are each sufficient to insure that T is of trace class:

(1) *k is of class $\mathfrak{A}^\lambda$ for some $\lambda > \frac{n}{2}$;*

(2) *k is of class $\mathfrak{K}^\lambda$ for some $\lambda > \frac{n}{2}$.*

In case (1), $\| T \|_1 \leqq A[\| k \|_2 + \mathfrak{A}^\lambda(k)]$; *in case* (2) $\| T \|_1 \leqq B[\| k \|_2 + \mathfrak{K}^\lambda(k)]$; *here A and B are independent of k.*

Let M be an n-dimensional manifold of class C^p. By a coordinate system in M, we mean a diffeomorphism ξ of class C^p from an open subset of M onto an open subset of R^n. A pair (U, ξ) consisting of an open set U whose closure is compact and is contained in the domain of the coordinate system ξ will be called a coordinate patch. If k is a locally square integrable function from M to a Hilbert space $\mathfrak{H}$, we shall say that a derivative $\frac{\partial k}{\partial \xi_j}$ exists in the mean on the coordinate patch (U, ξ) if the difference quotient $[k(\xi_1, \ldots, \xi_j + \delta, \ldots, \xi_n) - k(\xi)]/\delta$ has a limit in $L_2(U, \mathfrak{H})$ as $\delta \to 0$, where the computation is done with respect to the coordinate system ξ. If k has mean derivatives on (U, ξ) up through order r, we shall say that k is of class $\mathfrak{A}^r$ on (U, ξ) and set

$$\mathfrak{A}^r(k; U, \xi) = \left\{ \sum_{j=1}^n \int_U \left\| \frac{\partial^r k}{\partial \xi_j^r} \right\|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Let $0 < \vartheta < 1$. If k is of class $\mathfrak{A}^r$ on (U, ξ), and if for some ε small enough to make sense,

$$\mathfrak{A}_\varepsilon^{r+\vartheta}(k; U, \xi) = \left\{ \sum_{j=1}^n \int_{|h|<\varepsilon} dh \int_U \frac{1}{|h|^{2\vartheta+n}} \left\| \frac{\partial^r}{\partial \xi_j^r} [k(\xi + h) - k(\xi)] \right\|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}}$$

is finite, the integral being calculated in the coordinate system ξ, then we shall say that k is of class $\mathfrak{A}^{r+\vartheta}$ on (U, ξ). If $\mathfrak{U}$ is a finite set of coordinate patches $(U_1, \xi^{(1)}), \ldots, (U_m, \xi^{(m)})$, we shall write

$$\mathfrak{A}_\varepsilon^\lambda(k, \mathfrak{U}) = \left\{ \sum_{q=1}^m [\mathfrak{A}_\varepsilon^\lambda(k; U_q, \xi^{(q)})]^2 \right\}^{\frac{1}{2}};$$

if λ is an integer, the ε's should be ignored.

We shall say that a set of coordinate patches covers a set S if S is contained in the union of the first components of the corrdinate patches. The chain rule and the product rule for differentiation still hold for mean derivatives. From this fact it is not hard to see that if k is of class $\mathfrak{A}^\lambda$ on each of a set of coordinate patches that covers M and $\lambda \leqq p$, then k is of class $\mathfrak{A}^\lambda$ on every coordinate patch; in this case we shall say simply that k is locally of class $\mathfrak{A}^\lambda$. In fact, if (U, ξ) is a coordinate patch such that U is covered by a finite set $\mathfrak{V}$ of coordinate patches, then

$$\mathfrak{A}_\varepsilon^\lambda(k;\, U, \xi) \leqq A[\mathfrak{A}^0(k, \mathfrak{V}) + \mathfrak{A}_\varepsilon^\lambda(k, \mathfrak{V})]$$

for a sufficiently small $\varepsilon > 0$ where A is independent of k; if λ is an integer, ε should be ignored.

We define class $\mathfrak{K}^\lambda$ and associated numbers $\mathfrak{K}^\lambda(k, \mathfrak{U})$ in an analogous way.

Theorem 3. *Let M be an n-dimensional manifold of class $C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$. Let k be a locally square-integrable function from M to a Hilbert space $\mathfrak{H}$. Let μ be a regular measure on M with compact support C such that $d\mu$ is an n-form with a locally bounded measurable coefficient, and let T be the mapping from $L_2(M, \mu)$ to $\mathfrak{H}$ given by*

$$Tf = \int_M f(x)\, k(x)\, d\mu(x).$$

The following conditions are each sufficient to insure that T is of trace class:

(1) *k is locally of class $\mathfrak{A}^\lambda$ for some $\lambda > \frac{n}{2}$;*

(2) *k is locally of class $\mathfrak{K}^\lambda$ for some $\lambda > \frac{n}{2}$.*

In case (1), $\|T\|_1 \leqq A[\mathfrak{A}^0(k, \mathfrak{U}) + \mathfrak{A}_\varepsilon^\lambda(k, \mathfrak{U})]$; *in case* (2), $\|T\|_1 \leqq B[\mathfrak{A}^0(k, \mathfrak{U}) + \mathfrak{K}_\varepsilon^\lambda(k, \mathfrak{U})]$; *here $\mathfrak{U}$ is a finite set of coordinate patches which covers C, and A and B are independent of k. In case* (1), *if λ is an integer, ε should be ignored.*

Proof. Let $\mathfrak{U} = \{(U_1, \xi^{(1)}), \ldots, (U_m, \xi^{(m)})\}$. Let $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ be $C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ functions on M with values between 0 and 1 such that

(i) φ_q is 0 outside a compact subset of the domain of $\xi^{(q)}$;

(ii) $$\sum_{q=1}^{m} \varphi_q = 1 \text{ on } C.$$

By applying theorem 2 to the functions $\varphi_q(x)\, k(x)$, we obtain theorem 3.

5. Kernels of two variables.

Theorem 4. *Let M be an n-dimensional manifold of class $C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$. Let Y be a measure space with measure ν. Let K be a measurable complex-valued function on $Y \times M$ such that $\int |K(y, \cdot)|^2\, d\nu(y)$ is locally integrable on M. Let μ be a regular measure on M with compact support C such that $d\mu$ is an n-form with a locally bounded measurable coefficient. Let T be the mapping from $L_2(M, \mu)$ to $L_2(Y, \nu)$ given by*

$$(Tf)(y) = \int K(y, x)\, f(x)\, d\mu(x).$$

The following conditions are each sufficient to insure that T is of trace class:

(1) *For some $\lambda > \frac{n}{2}$, $K(y, \cdot)$ is locally of class $\mathfrak{A}^\lambda$ for almost every y, and there exists a finite set $\mathfrak{U}$ of coordinate patches that covers C, such that*

$$\int_Y \{\mathfrak{A}_\varepsilon^\lambda(K(y, \cdot), \mathfrak{U})\}^2\, d\nu(y)$$

is finite for suitable $\varepsilon > 0$; if λ is an integer, ε should be ignored.

(2) *For some* $\lambda > \frac{n}{2}$, $K(y, \cdot)$ *is locally of class* $\mathfrak{R}^\lambda$ *for almost every* y, *and there exists a finite set* $\mathfrak{U}$ *of coordinate patches that covers* C *such that*

$$\int_Y \{\mathfrak{R}^\lambda_\varepsilon(K(y,\cdot),\mathfrak{U})\}^2 \, d\nu(y)$$

is finite for suitable $\varepsilon > 0$.

(3) $\nu(Y)$ *is finite, and there exists a finite set* $\mathfrak{U}$ *of coordinate patches that covers* C *such that* $K(y, x)$ *has continuous derivatives in* x *up through order* $r = \left[\frac{n}{2}\right]$ *on each coordinate patch in* $\mathfrak{U}$ *and the* r^{th} *derivatives of* $K(y, x)$ *in* x *satisfy Lipschitz conditions of order* ϑ *uniformly in* y *for some* $\vartheta > \frac{n}{2} - r$.

In case (1)

$$\| T \|_1 \leqq A \{ \int_Y ([\mathfrak{A}^0(K(y, \cdot), \mathfrak{U})]^2 + [\mathfrak{A}^\lambda_\varepsilon(K(y, \cdot), \mathfrak{U})]^2) \, d\nu(y)\}^{\frac{1}{2}}$$

where A *is independent of* K; *if* λ *is an integer,* ε *should be ignored. In case* (2), $\| T \|_1$ *is bounded by a similar expression in which* $\mathfrak{R}^\lambda_\varepsilon$ *replaces* $\mathfrak{A}^\lambda_\varepsilon$; *again* A *is independent of* K. *In case* (3), $\| T \|_1$ *is bounded by a constant, independent of* K, *times the sum of the supremum of* K *on* $Y \times C$ *and all the constant factors in the Lipschitz conditions on all the* r^{th} *derivatives of* $K(y, x)$ *in* x *on all the coordinate patches of* $\mathfrak{U}$.

Proof. Let $\mathfrak{H} = L_2(Y, \nu)$, and let $k(x) = K(\cdot, x)$. By use of the inequality

$$\int_{R^n} \left| \frac{g(u_1, \ldots, u_j + \delta, \ldots, u_n) - g(u)}{\delta} \right|^2 du \leqq \int_{R^n} \left| \frac{\partial g}{\partial u_j} \right|^2 du$$

theorem 5 follows from theorem 4.

6. Compact Lie groups. Let G be a compact group. Let Γ be a collection of irreducible unitary representations of G such that every irreducible representation of G is unitarily equivalent to exactly one element of Γ. By the Fourier series of a function g in $L_1(G)$, we mean the series

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} d_\gamma \operatorname{tr}(C_\gamma \, \gamma(x))$$

where the Fourier coefficient C_γ is an operator on the d_γ-dimensional representation space of γ given by

$$C_\gamma = \int g(x) \, \gamma(x^{-1}) \, dx.$$

We shall say that g has an absolutely convergent Fourier series if

$$\sum d_\gamma \| C_\gamma \|_1 < +\infty.$$

The integral operator T on $L_2(G)$ with kernel $g(yx^{-1})$ is unitarily equivalent to the direct sum of the operators $d_\gamma C_\gamma$. Hence g has an absolutely convergent Fourier series if and only if T is of trace class. Consequently, theorem 4 implies a theorem about absolute convergence of the Fourier series of g.

Theorem 5. *Let* G *be an* n*-dimensional compact Lie group, and let* g *be a function in* $L_2(G)$. *The following conditions are each sufficient to insure that* g *has an absolutely convergent Fourier series*:

(1) g *is locally of class* $\mathfrak{A}^\lambda$ *for some* $\lambda > \frac{n}{2}$.

(2) g *is locally of class* $\mathfrak{R}^\lambda$ *for some* $\lambda > \frac{n}{2}$.

(3) *There exists a finite set* $\mathfrak{U}$ *of coordinate patches that covers* G *such that* g *has continuous derivatives up through order* $r = \left[\frac{n}{2}\right]$, *and the* r^{th} *derivatives of* g *on each coordinate patch of* $\mathfrak{U}$ *satisfy Lipschitz conditions of order* $\vartheta > \frac{n}{2} - r$.

Let $\{C_\gamma\}$ *be the Fourier coefficients of* g, *and let* $C = \Sigma_\gamma d_\gamma \| C_\gamma \|_1$. *Then, in case* (1), $C \leqq A[\| g \|_2 + \mathfrak{A}_\varepsilon^\lambda(g, \mathfrak{U})]$ *where* A *is independent of* g; *if* λ *is an integer,* ε *should be ignored. In case* (2), $C \leqq B[\| g \|_2 + \mathfrak{R}_\varepsilon^\lambda(g, \mathfrak{U})]$, *where* B *is independent of* g. *In case* (3), C *is bounded by a constant, independent of* g, *times the sum of the supremum of* g *and all the constant factors in the Lipschitz conditions on all the* r^{th} *derivatives of* g *on all the coordinate patches of* $\mathfrak{U}$.

Proof. Let $\mathfrak{U} = \{(U_1, \xi^{(1)}), \ldots, (U_m, \xi^{(m)})\}$. We must verify condition (1) of theorem 4 for the kernel $K(y, x) = g(yx^{-1})$. For each y in G, let $\eta_y^{(q)}$ be the coordinate system given by

$$\eta_y^{(q)}(x) = \xi^{(q)}(yx^{-1});$$

and let $\mathfrak{B}_y = \{(U_1^{-1}y, \eta_y^{(1)}), \ldots, (U_m^{-1}y, \eta_y^{(m)})\}$. Then

$$\mathfrak{A}_\varepsilon^\lambda(K(y, \cdot), \mathfrak{U}) = \mathfrak{A}_\varepsilon^\lambda(g, \mathfrak{B}y) \leqq A(y)\, \mathfrak{A}_\varepsilon^\lambda(g, \mathfrak{U}),$$

where for each y, $A(y)$ is independent of g. A closer examination of the proof of the inequality above shows that for each y_0 in G, $A(y)$ can be chosen to be continuous for y in some neighborhood of y_0. Then, because G is compact, there exists a constant A_0, independent of g and y, such that

$$\mathfrak{A}_\varepsilon^\lambda(K(y, \cdot), \mathfrak{U}) \leqq A_0\, \mathfrak{A}_\varepsilon^\lambda(g, \mathfrak{U}).$$

Theorem 5 now follows from theorem 4.

Bibliography.

1. *L. Gårding*, Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, Math. Scand. 1 (1953), 55—71.
2. *E. Hille*, Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, XXXI, New York, 1948.
3. *W. Forrest Stinespring*, Integrability of Fourier transforms for unimodular Lie groups, submitted to the Duke Math. Journal.
4. *A. Zygmund*, Trigonometrical series, New York, Chelsea, 1952.

Eingegangen am 21. Februar 1958.

Sur une note de Mattuck-Tate.

Par *A. Grothendieck* à Paris.

Dedicated to E. Artin for his 60th birthday.

1. Dans un travail récent [4], Mattuck et Tate déduisent l'inégalité fondamentale de A. Weil qui établit l'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions [7] comme conséquence facile du théorème de Riemann-Roch pour les surfaces. En essayant de comprendre la portée exacte de leur méthode, je suis tombé sur l'énoncé suivant, connu en fait depuis 1937 [2] [6] [1] (comme me l'a signalé J. P. Serre), mais apparemment peu connu et utilisé:

Théorème 1. 1. (*Hodge-Segre-Bronowski*). *Soient X une surface projective non singulière, $\mathfrak{P}$ le groupe des classes de diviseurs sur X (pour l'équivalence linéaire), P la variété de Picard de X, et $N = \mathfrak{P}/P$ le groupe de Néron-Sévéri de X. Soit $E = N \otimes R$, considérons sur N la forme bilinéaire symétrique f déduite de l'application $(D, D') \to D \cdot D'$ de $\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$ dans Z, et soit aussi f la forme bilinéaire sur $E \times E$ qui s'en déduit. Si E est de dimension n, alors f est non dégénérée de type $(1, n-1)$.*

Ce théorème semble utiliser, dans son énoncé, le théorème de Néron [5] impliquant que E est de dimension finie. Il serait évident comment formuler le théorème 1 si on voulait ignorer le théorème de Néron. Signalons tout de suite que le fait que f soit non dégénérée est un cas particulier d'un résultat de A. Weil [8], valable pour des variétés X de dimension quelconque. Quant à l'autre assertion du théoreme 1, savoir que dans f intervient exactement un carré positif, [1] [6] en donnent des démonstrations assez simples, valables en toute caractéristique. Nous allons en donner au N° 2 une démonstration encore plus simple, en utilisant un résultat auxiliaire (prop. 1) ayant quelque intérêt propre. Nous allons indiquer dans ce numéro comment on tire du théorème 1 diverses inégalités remarquables, incluant celle de A. Weil.

De façon générale, soit f une forme bilinéaire symétrique de type $(1, n-1)$ sur un espace vectoriel E de dimension n. Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant un élément x tel que $f(x, x) \geqq 0$. Alors la restriction de f à l'orthogonal F^0 de F est négative, et même définie négative si la restriction de f à F est non dégénérée. Si par exemple x, y, z sont trois éléments de E tels que $f(x, x) \geqq 0$, alors $u = yf(x, z) - zf(x, y)$ est orthogonal à x, et par suite $f(u, u) \leqq 0$, donc

$$(1.1) \qquad f(x, z)^2 f(y, y) + f(x, y)^2 f(z, z) - 2f(x, y) f(y, z) f(z, x) \leqq 0, \quad \text{si } f(x, x) \geqq 0.$$

D'ailleurs on ne peut avoir égalité dans (1. 1) que si $f(x, x) = 0$ ou $yf(x, z) - zf(x, y) = 0$.

Soient $x_i (1 \leqq i \leqq m)$ des éléments de E, et soit

$$g(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(\Sigma \lambda_i x_i, \Sigma \lambda_i x_i).$$

Cette forme quadratique est soit dégénérée, soit de type $(1, m-1)$, soit définie négative, ces faits ayant lieu suivant que le déterminant dét $(f(x_i, x_j))$ est nul, ou a le signe de $(-1)^{m-1}$, ou le signe de $(-1)^m$. On est dans l'un des deux premiers cas si et seulement si il existe une combinaison linéaire non triviale des x_i, soit x, telle que $f(x, x) \geqq 0$. Donc cette condition est remplie si et seulement si on a

$$(1.2) \qquad (-1)^{m-1} \operatorname{dét}(f(x_i, x_j)) \leqq 0 .$$

D'ailleurs, on vérifie très facilement que si un sous-espace vectoriel F de E contient un élément x tel que $f(x, x) > 0$, alors la restriction de f à F est non dégénérée. Par suite, l'inégalité stricte dans (1. 2) est équivalente au fait que l'espace vectoriel F engendré par les x_i soit de dimension m, et contienne un x tel que $f(x, x) > 0$. On peut dire encore que si il existe $x \in F$ avec $f(x, x) > 0$, alors l'inégalité (1. 2) est satisfaite, et c'est une égàlité si et seulement si les x_i sont linéairement dépendants.

Spécialisons aux cas $m = 2$ et $m = 3$, on obtient les inégalités

$$(1.3) \qquad f(x, x)\, f(y, y) \leqq f(x, y)^2$$

$$(1.4) \qquad f(x, x)\, f(y, z)^2 + f(y, y)\, f(z, x)^2 + f(z, z)\, f(x, y)^2 - f(x, x)\, f(y, y)\, f(z, z) - 2 f(x, y)\, f(y, z)\, f(z, x) \leqq 0$$

valables si et seulement si il existe une combinaison linéaire non triviale u de x, y (resp. de x, y, z) telle que $f(u, u) \geqq 0$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que si x, y (resp. x, y, z) sont linéairement dépendants, *ou* f négative sur l'espace qu'ils engendrent. En particulier, l'inégalité (1. 3) implique (1. 4), et si (1. 3) est une inégalité stricte, alors (1. 4) n'est une égalité que si z est combinaison linéaire de x et y. Supposons par exemple qu'on ait

$$(1.5) \qquad f(x, x) = f(y, y) = 0, \; f(x, y) = 1 ,$$

alors quel que soit z, on a l'inégalité

$$(1.6) \qquad f(z, z) - 2 f(z, x)\, f(z, y) \leqq 0$$

qui est une égalité si et seulement si on a

$$(1.7) \qquad z = x f(z, y) + y f(z, x) .$$

On peut d'ailleurs interpréter le premier membre de (1. 6) comme $f(u, u)$, où u est la projection orthogonale de z sur l'orthogonal du plan engendré par x, y. D'ailleurs (1. 6) est aussi un cas particulier de (1. 1), mais le cas d'égalité n'est pas donné par les considérations de (1. 1).

Le cas de A. Weil est celui où E est l'espace de Néron-Sévéri associé à une surface X produit de deux courbes projectives non singulières Γ_1 et Γ_2. Prenant un point e_i dans Γ_i $(i = 1, 2)$, on considère les classes dans E des diviseurs $\Gamma_1 \times e_2$ et $e_1 \times \Gamma_2$, soient x, y. Les relations (1. 5) sont satisfaites, d'où pour toute classe de diviseurs D sur $X = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ l'inégalité de A. Weil

$$(1.8) \qquad D^2 - 2\,\mu(D)\,\nu(D) \leqq 0$$

où $\mu(D)$ et $\nu(D)$ sont les „degrés partiels" de D

$$\mu(D) = D \cdot (\Gamma_1 \times e_2), \quad \nu(D) = D \cdot (e_1 \times \Gamma_2) .$$

En vertu de ce qui précède, (1. 8) est une égalité si et seulement si on a

$$D = \mu(D)\,(e_1 \times \Gamma_2) + \nu(D)\,(\Gamma_1 \times e_2) + D ,$$

où D' est un diviseur tel que son image dans E soit nulle, i. e. tel que son image dans $N = \mathfrak{P}/P$ soit un élément de torsion. On peut en conclure (d'après J. P. Serre) que en fait $D' \in P$ (ce qui redonne le résultat complet de Weil). En d'autres termes, on a le résultat

suivant: *le groupe de Néron-Séveri N de $X = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ est sans torsion.* Nous ne démontrerons pas ici ce fait, nous contentant d'indiquer qu'il est un cas particulier du résultat suivant, dû à J. P. Serre, et qui résulte facilement de [3]: Pour toute variété non singulière projective X, soit $T(X)$ le groupe des classes de diviseurs sur X dont un multiple entier convenable est algébriquement équivalent à zéro. Alors on a la formule suivante d'additivité:

$$T(X \times Y) = T(X) \times T(Y). \tag{1.9}$$

2. Nous allons déduire le théorème 1 d'une proposition auxiliaire, que nous énoncerons avec plus de précision qu'il ne sera nécessaire pour notre objet.

Si D est un diviseur sur X, nous désignons par $l(D)$ la dimension de l'espace vectoriel des fonctions f sur X telles que $(f) \geqq -D$. Donc $l(D)$ ne dépend que de la classe de D. Rappelons *l'inégalité de Riemann-Roch*

$$l(D) + l(K - D) \geqq \tfrac{1}{2} D(D - K) + \chi(X) \tag{2.1}$$

où K est la *classe de diviseurs canonique* sur X, *et* $\chi(X)$ le *genre arithmétique* de X. Rappelons que cette inégalité résulte de l'égalité de Riemann-Roch

$$\sum_0^2 (-1)^i \dim H^i(X, \underline{O}(D)) = \tfrac{1}{2} D(D - K) + \chi(X)$$

(qui se démontre maintenant de façon très élémentaire), et du théorème de dualité de Serre

$$\dim H^2(X, \underline{O}(D)) = \dim H^0(X, \underline{O}(K - D)). \tag{2.2}$$

Notons aussi l'inégalité évidente

$$l(D + D') \geqq l(D') \quad \text{si} \quad l(D) > 0. \tag{2.3}$$

Enfin, rappelons aussi que, si H est une section hyperplane de X (dans une immersion projective de X), alors

$$l(D) > 1 \text{ implique } D \cdot H > 0 \tag{2.4}$$

car $l(D) > 1$ implique que D est équivalent à un diviseur strictement positif D', et d'autre part on peut trouver une section hyperplane H' équivalente à H n'ayant aucune composante commune avec D', d'où $D \cdot H = D' H' > 0$.

Proposition 2. 1. *Soit D un diviseur tel que $D^2 > O$. Alors remplaçant au besoin D par $-D$, on aura $l(-nD) = 0$ pour tout entier $n > 0$, et alors pour tout diviseur D', on aura $l(D' - nD) = 0$ pour n assez grand, et $l(D' + nD)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.*

Soit

$$M = 1 + \operatorname{Sup}(1, l(2K)). \tag{2.5}$$

On voit sur (2. 1) appliqué à mD que l'on peut trouver un entier $n \geqq 0$ tel que $l(mD) + l(K - mD) \geqq 2M$ pour $|m| \geqq n$, d'où

$$l(mD) \geqq M \text{ ou } l(K - mD) \geqq M \text{ pour } |m| \geqq n. \tag{2.6}$$

Bornons nous aux entiers m tels que $|m| \geqq n$. On a

$$l(K - mD) \geqq M \text{ implique } l(K + mD) = 0 \text{ et } l(-mD) \geqq M. \tag{2.7}$$

En effet, si on avait $l(K + mD) > 0$, on conclurait de (2.3) que $l(K + mD + K - mD) \geqq M$, ce qui contredit (2. 5). On a donc $l(K + mD) = 0$, donc $l(-mD) \geqq M$ en vertu de (2. 6)

appliqué à $-m$. Donc comparant (2. 6) et (2. 7) on voit que $l(mD) \geqq M$ ou $l(-mD) \geqq M$. Changeant au besoin D de signe, on voit que l'on aura

$$l(mD) \geqq M. \tag{2. 8}$$

On en tire

$$l(-mD) = 0 \tag{2. 8'}$$

car autrement on conclurait de (2. 3) que $l(mD - mD) = 1 \geqq M$, ce qui contredit (2. 5). Appliquant (2. 6) à $-m$, on en tire

$$l(K + mD) \geqq M \tag{2. 8''}$$

d'où, appliquant (2. 7) à $-m$

$$l(K - mD) = 0. \tag{2. 8'''}$$

On a donc démontré que si $|m| \geqq n$, on a les 4 inégalités précédentes, ou celles qui s'en déduisent en remplaçant D par $-D$. Il en résulte aussitôt que pour $|m| \geqq n$, chacune de ces 4 inégalités entraine toutes les autres. Supposons que pour $m = n$, ce soient les inégalités écrites ci-dessus qui soient valables (ce qui est loisible). Je dis qu'il en est de même pour tout $m > n$. On tire en effet de (2. 3) et (2. 8): $l(knD) \geqq M$ si $k > 0$, d'où en vertu de ce qu'on vient de dire $l(-knD) = 0$, d'où a fortiori, en vertu de (2. 3):

$$l(-kD) = 0 \text{ pour } k > 0. \tag{2. 9}$$

Faisant $k = m$, cela donne (2. 8'), d'où toutes les inégalités (2. 8) à (2. 8'''). De cette dernière relation on tire, compte tenu de (2. 1):

$$l(mD) \geqq \tfrac{1}{2}\, mD(mD - K) + \chi(X) \quad \text{si } |m| \geqq n. \tag{2. 10}$$

Soit maintenant D' un diviseur quelconque sur X, prouvons que

$$l(D' - mD) = 0 \quad \text{pour } m \text{ grand}. \tag{2. 11}$$

Soit en effet $n' \geqq n$ tel que $m \geqq n'$ implique $l(mD) > l(D')$ (un tel n' existe en vertu de (2. 10)). Si pour un tel m, on avait $l(D' - mD) > 0$, on en conclurait en vertu de (2. 3): $l(D' - mD + mD) > l(D')$, ce qui est absurde. Cela établit (2. 11) pour tout D'. Appliquons enfin l'inégalité (2. 1) au diviseur $D' + mD$, en tenant compte que $l(K - D' - mD) = 0$ pour m grand en vertu de (2. 11), appliqué à $K - D'$. On trouve

$$l(D' + mD) \geqq \tfrac{1}{2}(D' + mD)(D' + mD - K) + \chi(X) \tag{2. 12}$$

pour m grand ce qui montre bien que $l(D' + mD)$ tend vers $+\infty$ avec m, et achève la démonstration de prop. 2. 1.

Prouvons maintenant le théorème 1. Soit H une section hyperplane de X, on a alors

$$H^2 > 0$$

en vertu de (2. 4), ce qui implique que la forme quadratique f sur E comporte au moins un carré positif. Pour montrer que f n'en a pas d'autres, il suffit de prouver que si D est un diviseur dont l'image dans $E = N \otimes R$ est orthogonale à celle de H, i. e. tel que $D \cdot H = 0$, alors on a $D^2 \leqq 0$. Or si on avait $D^2 > 0$, alors en vertu de proposition 2. 1 il existerait un n tel que $l(nD) > 1$, d'où en vertu de (2. 4)

$$nD \cdot H > 0$$

contrairement à l'hypothèse $D \cdot H = 0$, cqfd.

Remarque. Soit f une forme quadratique non dégénérée de type $(1, n-1)$ sur un espace vectoriel E. On voit alors aussitôt que l'ensemble Q des $x \in E$ tels que $f(x, x) > 0$

à deux composantes connexes. Si $x \in Q$, les éléments y de Q qui sont dans la même composante connexe que x sont caractérisés par l'inégalité

$$f(x, y) > 0.$$

Utilisant (2. 4), on voit que si E est l'espace de Néron-Sévéri d'une surface projective non singulière X, alors les sections hyperplanes de X (pour tous les plongements projectifs possibles) définissent des éléments de E qui sont dans une même composante connexe de Q, soit P, et que les diviseurs D avec $D^2 > 0$, pour lesquels $l(nD)$ tend vers $+\infty$ avec n (cf prop. 2. 1) sont exactement ceux dont l'image d dans E est dans P. D'ailleurs, on voit aussitôt que P est le plus petit cône convexe ferme contenant ces éléments d de E. On peut se demander si pour un tel D, il existe un entier $n > 0$ tel que nD soit équivalent à une section hyperplane H. Cela implique (et est en fait équivalent, pour X donné) que $\bar{P}$ est aussi le plus petit cône convexe fermé contenant les images h dans E de sections hyperplanes H. Comme $\bar{P}$ est identique à l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x, y) \geqq 0$ pour tout $y \in \bar{P}$ (comme il résulte facilement du fait que f est de type $(1, n-1)$), ce dernier fait équivaut par polarité au suivant: *Si D est un diviseur tel que $D \cdot H \geqq 0$ pour toute section hyperplane H, alors $D^2 \geqq 0$.* Cela implique a fortiori que pour tout diviseur *positif* D, on a $D^2 \geqq 0$. Or on sait que cette propriété n'est pas toujours vérifiée (par exemple dans le cas où D est la diagonale dans $\Gamma \times \Gamma$, où Γ est une courbe de genre $\geqq 2$).

3. Ce qui précède n'utilisait pas à proprement parler la méthode de Mattuck-Tate (si ce n'est en utilisant l'inégalité de Riemann-Roch sur les surfaces). Nous allons indiquer maintenant comment la méthode de ces auteurs, convenablement généralisée, donne d'autres inégalités que celle de A. Weil. Nous nous appuirons sur le

Lemme 3. 1. *Soient X une surface projective non singulière, C une courbe irréductible dans X, $\tilde{C}$ sa normalisée, g le genre de C, $P(X)$ et $P(C)$ la variété de Picard de X et de $\tilde{C}$. On suppose*

$$P(X) \to P(\tilde{C}) \text{ est surjectif, et } C^2 \geqq 0. \tag{3. 1}$$

Soit D un diviseur sur X tel que

$$D \cdot C \leqq g - 1. \tag{3. 2}$$

Soit k un corps de définition pour X, C, D, et soit d un élément de $P(X)$ générique sur k. Alors on a $l(D + d) = 0$.

Soit $L(D')$ le fibré vectoriel sur X défini par la classe de diviseurs $D' = D + d$, et soit s une section régulière de $L(D')$ sur X, nous voulons montrer que $s = 0$. Soit f la projection de $\tilde{C}$ dans X, soit $f^*(D')$ la classe de diviseurs sur C image inverse par f de D'. En vertude (3. 1) et (3. 2), c'est une classe de diviseus degré $D \cdot C \leqq g - 1$ *générique* sur k. Il est bien connu qu'on a alors $l(f^*(D')) = 0$ (conséquence du théorème de Riemann-Roch sur une courbe). Donc l'image inverse de s sur $\tilde{C}$ est nulle, i. e. s s'annule C, donc s est une section de $L(D' - C)$. Or en vertu de $C^2 \geqq 0$, le diviseur $D - C$ sur X satisfait la même condition (3. 2) que D. Appliquant le résultat précédent, on voit que s, en tant que section de $L(D' - C)$, s'annule sur C, donc est une section de $L(D' - 2C)$. On voit ainsi de proche en proche que pour tout entier n, s est une section de $L(D' - nC)$, i. e. s s'annule avec l'ordre n au moins sur C. Comme n est arbitraire, cela implique bien $s = 0$.

Théorème 3. 2. *Soient X une surface projective non singulière, C, C' deux courbes irréductibles sur X satisfaisant toutes les deux aux conditions écrites pour C dans* (3. 1).

Soient $\tilde{C}$, $\tilde{C}'$ leurs normalisées, g, g' leurs genres, π, π' leurs genres virtuels. Soient enfin $\delta = \pi - g$, $\alpha = C^2$, et définissons de même δ', α'. Soit D un diviseur sur X tel que

$$(3.3) \qquad D \cdot C \leqq g - 1 \quad et \quad D \cdot C' \geqq \pi' - 1 - \alpha' + \delta' = g' - 1 - \alpha' + 2\delta'.$$

Alors on a

$$(3.4) \qquad \chi(D) = \tfrac{1}{2} D(D - K) + \chi(X) \leqq 0.$$

Démonstration. Soit k un corps de définition pour X, C, C', D, et soit d un élément de $P(X)$ générique sur k. Soit $D' = D + d$. En vertu du lemme 3. 1 on a $l(D') = 0$. Appliquons maintenant ce même lemme à $K - D$ et à C'. On a bien

$$(K - D) \cdot C' \leqq g' - 1$$

comme il résulte aussi tôt de la deuxième inégalité (3. 3) et de la formule bien connue

$$(3.5) \qquad \pi' = \tfrac{1}{2} C'(C' + K) + 1.$$

Par suite on a $l(K - D') = 0$. Par suite l'inégalité de Riemann-Roch (2. 1) appliquée à D' donne $\chi(D') \leqq 0$. Comme $\chi(D') = \chi(D)$, l'inégalité (3. 4) s'ensuit.

Dans le cas où C, C', D avec les propriétés indiquées dans le théorème 3. 2 existent, il est facile d'en déduire le théorème 1. 1. (On écrit que (3. 4) reste vrai quand on remplace D par $D + mD'$, où D' est un diviseur orthogonal à C et C'). Nous allons donner des inégalités d'une autre nature conséquences de (3. 4):

Corollaire 1. *Soient X une surface projective non singulière, C une courbe irréductible sur X, $\tilde{C}$ sa normalisée, g le genre de C et π le genre virtuel de C, on pose $\alpha = C^2$, $\delta = \pi - g$, et on suppose:*

$$(3.6) \qquad \alpha \geqq 2\delta \text{ et l'homomorphisme } P(X) \to P(\tilde{C}) \text{ est surjectif}.$$

Enfin on suppose que la classe canonique K de X est de la forme $2K'$, où K' est une classe de diviseurs, qu'on notera $K/2$. Sous ces conditions on a

$$(3.7) \qquad \chi(K/2) \leqq 0.$$

On applique le théorème 3. 2 avec $C = C'$. Les conditions sur C et C' sont vérifiées, et la condition (3. 3) pour un diviseur D s'écrit

$$(3.3 \text{ bis}) \qquad g - 1 - (\alpha - 2\delta) \leqq D \cdot C \leqq g - 1.$$

La condition $\alpha \geqq 2\delta$ dans (3. 6) signifie que les termes extrêmes dans (3. 3 bis) ont bien la relation d'inégalité voulue; comme leur demi-somme est précisément $C \cdot K/2$ en vertu de (3. 5), on peut prendre $D = K/2$, et l'inégalité (3. 7) n'est autre que (3. 4). Remarquons d'ailleurs que

$$\chi(K/2) = \tfrac{1}{2}(K/2) \cdot (-K/2) + \chi(X) = -\tfrac{1}{8} K^2 + \chi(X)$$

donc (3. 7) s'écrit aussi

$$(3.7 \text{ bis}) \qquad K^2 \leqq 8\chi(X).$$

D'ailleurs, utilisant la formule de Zeuthen-Segre

$$\chi(X) = \tfrac{1}{12}(K^2 + E)$$

et définissant l'*index* de X par la formule de Thom-Hirzebruch

$$\tau = \tfrac{1}{3}(K^2 - 2E)$$

(E étant la caractérisitique d'Euler-Poincaré de X, où si on veut sa dernière classe de Chern), on trouve

$$(3.8) \qquad \chi(K/2) = -\frac{1}{24}\tau$$

de sorte que (3. 7) est équivalent à la formule

$$\tau \geqq 0. \tag{3. 7 ter}$$

Corollaire 2. *Les notations étant comme ci-dessus, on suppose $g = 0$ et $\alpha \geqq 2\delta$. Si D est un diviseur tel que DC soit compris entre $-1-(\alpha-2\delta)$ et -1, alors on a $\chi(D) \leqq 0$. En particulier, s'il existe sur X une courbe irréductible non singulière de genre 0 telle que $C^2 > 0$, alors $\chi(X) \leqq 1$.*

On applique le théorème 3. 2 avec $C = C'$, la conditions (3. 1) est vérifiée puisque $P(\tilde{C}) = 0$. La condition sur D s'écrit, dans le deuxième cas:

$$-1-\alpha \leqq D \cdot C \leqq -1$$

et on peut prendre $D = -C$, on trouve $\chi(-C) \leqq 0$. Or le premier membre est $\frac{1}{2}C(C+K)+\chi(X)$, donc en vertu de (3. 5) c'est $\pi - 1 + \chi(X)$, et comme $\pi = g + \delta = 0$ (puisque $g = 0$, $\delta = 0$), on trouve $-1+\chi(X) \leqq 0$, i. e. $\chi(X) \leqq 1$.

Corollaire 3. *Soient X une surface projective non singulière, $(C_t)_{t \in T}$ une famille algébrique de courbes irréductibles sur X. On suppose que l'intersection des C_t est vide, et que $C_t^2 = 1$ (pour un t ou tout t, cela revient au même). Sous ces conditions, pour tout t, C_t est non singulière et l'homomorphisme $P(X) \to P(C_t)$ est surjectif. Si g est le genre commun des C_t, on a*

$$\chi(X) \leqq (g-1)(g-2). \tag{3. 9}$$

Soit T' la partie ouverte de la variété des paramètres des s tels que $C_s \neq C_t$. T' n'est pas vide, et comme $C_t \cdot C_s = 1$, le cycle intersection $C_t \cdot C_s$ est réduit à un point a_s sur C_t. Quand s varie, les a_s forment une famille algébrique de cycles sur C_t, non constante puisque l'intersection des C_s et de C_t est vide. Par suite, il existe un ouvert U sur C_t formé de points de la forme a_s. Soit $P(C_t)$ la variété jacobienne *généralisée* de C_t (C_t a priori peut avoir des singularités). On a un homomorphisme naturel $P(X) \to P(C_t)$, dont l'image contient les images $a_s - a_{s'}$ des diviseurs $C_s - C_{s'}$ ($s, s' \in T'$), donc les classes de tous les cycles $a - b$ ($a, b \in U$). Par suite, cette image est dense. Comme $P(X)$ est complète, $P(C_t)$ est complète, ce qui implique que C_t est non singulière. De plus, l'homomorphisme $P(X) \to P(C_t)$ est surjectif. On peut donc appliquer le théorème 3. 2: pour tout diviseur D tel que $D \cdot C_t$ soit compris entre $g-1-1 = g-2$ et $g-1$, on a $\chi(D) \leqq 0$. On peut prendre en particulier $D = (g-1)C_t$, on trouve

$$(g-1)^2C^2 - (g-1)\,C \cdot K + 2\,\chi(X) \leqq 0.$$

Utilisant $C^2 = 1$ et (3. 5), on trouve l'inégalité (3. 9).

Corollaire 4. *Soient X une surface projective non singulière, C une courbe irréductible non singulière sur X telle que $C^2 > 0$ et que l'homomorphisme $P(X) \to P(C)$ soit surjectif. Introduisons la forme bilinéaire*

$$f_C(D, D') = \alpha D \cdot D' - (D \cdot C)(D' \cdot C) \tag{3. 10}$$

où on pose $\alpha = C^2$. Soit $2a = K \cdot C$. Alors la forme quadratique associée à la forme bilinéaire f_C est négative, et pour tout diviseur D, on a

$$f_C(D, D-K) + 2\alpha\chi(X) - a^2 \leqq 0. \tag{3. 11}$$

La première assertion résulte du théorème 1. 1., compte tenu que $C^2 > 0$, qui donne (cf (1. 3)): $(C^2)(D^2) - (C \cdot D)^2 \leqq 0$. On a d'ailleurs $f_C(D, D) = 0$ pour $D = nC$, donc $f_C(D, D')$ ne change pas quand on ajoute à ses arguments des multiples de C. Soit D un diviseur quelconque, on vérifie aussitôt la formule

$$2\alpha\chi(D) = f_C(D, D-K) + 2\alpha\chi(X) + y^2 - 2ay \qquad \text{où } y = D \cdot C. \tag{3. 12}$$

Or on a $y^2 - 2ay \geqq -a^2$ pour tout y réel, donc $2\alpha\chi(D)$ est minoré par le premier membre de (3. 11). Or ce dernier ne change pas si on ajoute à D un multiple de C. Choisissons l'entier x tel que $D' = D + xC$ satisfasse

$$g - 1 - \alpha \leqq D' \cdot C \leqq g - 1$$

ce qui s'écrit aussi $g - 1 - \alpha \leqq \alpha x + y \leqq g - 1$, de sorte qu'un tel x existe toujours. On peut alors appliquer le théorème 3. 2, qui nous donne $\chi(D') \leqq 0$, i. e. $2\alpha\chi(D + xC) \leqq 0$. Comme le premier membre est minoré par le premier membre de (3. 11) d'après ce qui précède, l'inégalité (3. 11) s'ensuit. En y faisant $D = 0$, on trouve, compte tenu de (3. 5)

$$2\alpha\chi(X) \leqq (g - 1 - \alpha/2)^2. \tag{3. 13}$$

Remarques. Le corollaire 1 devient faux si on ne fait pas l'hypothèse que $K/2$ est encore une classe de diviseurs. En effet, toutes les hypothèses sauf cette dernière sont vérifiées si X est un surface non singulière *rationnelle*. Or, à partir d'une telle surface, on construit facilement une surface birationnellement équivalente par éclatements successifs, dont l'index τ soit < 0 (contrairement à (3. 7 ter)). En effet, on vérifie aisément que lorsqu'on fait éclater un point dans une surface non singulière projective, l'index diminue d'une unité. (Cette remarque, ainsi que l'interprétation de l'inégalité (3. 7) à l'aide de l'index, m'a été signalée par J. P. Serre).

La disparité des énoncés qu'on déduit du théorème (3. 2) est due au fait qu'il n'est pas relatif à un élément arbitraire de l'espace vectoriel E de Néron-Sévéri introduit plus haut, mais à un élément du „lattice" provenant des diviseurs sur X. On notera d'ailleurs que dans le cas particulier où X est le produit des deux courbes C et C', le théorème 3. 2 ne contient rien de plus que l'inégalité de A. Weil.

Bibliographie.

[1] *G. Bronowski*, Curves whose grade is not positive in the theory of the base, J. London Math. Soc. **13** (1958), 86.

[2] *W. V. D. Hodge*, Note on the theory of the base for curves on an algebraic surface, J. London Math. Soc. **12** (1937), 58.

[3] *S. Lang-J. P. Serre*, Sur les revêtements non ramifiés des variétés algébriques, Amer. J. Math., **79** (1957), 319.

[4] *A. Matluck-J. Tate*, On the inequality of Castelnuovo-Severi, Hamb. Abh. **22** (1958), 295.

[5] *A. Néron*, Problèmes arithmétiques géométriques rattachés à la notion de rang d'une courbe dans un corps, Bulletin Soc. Math. France **80** (1952), 101.

[6] *B. Segre*, Intorno ad un teorema di Hodge sulla teoria della base per le curve di una superficie algebrica, Annali di Mat. **16** (1937), 167.

[7] *A. Weil*, Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, Actualités Scient. et Ind. 1041, Paris, Hermann.

[8] *A. Weil*, Sur les critères d'équivalence en Géométrie Algébrique, Math. Annalen **128** (1954), 95.

Eingegangen am 24. März 1958.

Inhaltsverzeichnis der Bände 191—200

	Band	Seite
Agnew, Ralph Palmer (*Ithaca*), Tauberian relations among partial sums, Riesz transforms, and Abel transforms of series	193.	94—118
Aigner, Alexander (*Graz*), Die kubische Fermatgleichung in quadratischen Körpern	195.	3—17
— —, Einige Sätze über Lagebeziehungen in endlichen Graphen	195.	18—21
— —, Unmöglichkeitskernzahlen der kubischen Fermatgleichung mit Primfaktoren der Art $3n+1$	195.	175—179
— —, Die Häufigkeitsverteilung gewisser Typen von endlichen Graphen	200.	125—128
Ara, Rahmat und **M. Pinl** (*Dacca*), Zur integrallosen Darstellung reeller isotroper Kurven	192.	204—209
Aumann, Georg (*München*), Über Hüllen- und Kernbildungen auf Verbänden	191.	50—53
Baer, Reinhold (*Urbana*), Direkte Faktoren endlicher Gruppen	192.	167—179
Ballier, Friedhorst (*Mainz*), Über lineartopologische Algebren	195.	42—75
Bauer, Heinz (*Erlangen*), Reguläre und singuläre Abbildungen eines distributiven Verbandes in einen vollständigen Vektorverband, welche der Funktionalgleichung $f(x \vee y) + f(x \wedge y) = f(x) + f(y)$ genügen	194.	141—179
Benz, Walter (*Mainz*), Axiomatischer Aufbau der Kreisgeometrie auf Grund von Doppelverhältnissen	199.	56—90
Bernstein, B. und **C. Truesdell** (*Indiana*), The solution of linear differential systems by quadratures	197.	104—111
Bergström, Harald (*Göteborg*), On the limit Theorems for Convolutions of Distribution Functions. I.	198.	121—142
— —, On the Limit Theorems for Convolutions of Distribution Functions. II.	199.	1—22
Beyer, Gudrun (*Hamburg*), Erweiterungsproblem galoisscher Körper und Zerfall einfacher Algebren	195.	215—220
— —, Über relativ-zyklische Erweiterungen galoisscher Körper	196.	34—58
— —, Über eine Vermutung von Hasse zum Erweiterungsproblem galoisscher Zahlkörper	196.	205—212
Blaschke, W. (*Hamburg*), Zur topologischen Differentialgeometrie	191.	153—157
Bögel, K. (*Ilmenau*), Die Struktur der stetigen Funktionen einer Veränderlichen. I.	196.	1—33
— —, Die Struktur der stetigen Funktionen einer Veränderlichen. II.	196.	137—154
— —, Die Struktur der stetigen Funktionen einer Veränderlichen. III.	198.	73—80
Brauer, Alfred (*Chapel Hill*), Über die Lage der charakteristischen Wurzeln einer Matrix	192.	113—116
Brun, Viggo (*Oslo*), Niels Henrik Abel. Neue biographische Funde	193.	239—249
Buckel, Walter (*Nördlingen*), Eine Kennzeichnung des Systems aller Kreise mit nichtverschwinden-Radius der euklidischen Ebene	191.	13—29
— —, Eine Kennzeichnung des Systems aller nichtzerfallenden Kegelschnitte der projektiven Ebene	191.	165—178
Butzer, P. L. (*Mainz*), Halbgruppen von linearen Operatoren und eine Anwendung in der Approximationstheorie	197.	112—120
Carlitz, L. und **John H. Hodges** (*Durham*), Distribution of bordered symmetric, skew and hermitian matrices in a finite field	195.	192—201
Cassels, J. W. S. (*Cambridge*), On the product of two inhomogeneous linear forms	193.	65—83
Claus, Heinz Jörg (*Philippsthal*), Über die Partialbruchzerlegung in nicht notwendig kommutativen euklidischen Ringen	194.	88—100

Band Seite

Collatz, L. (*Hamburg*), Über monotone Systeme linearer Ungleichungen . . . . . 194. 193—194
Dürbaum, Hansjürgen siehe Kowalsky, Hans-Joachim.
Eichler, Martin (*Münster*), Zur Zahlentheorie der Quaternionen-Algebren . . . . . 195. 127—151
— —, Über die Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen . . . . . 195. 156—171
— —, Berichtigung zu der Arbeit „Über die Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen" 196. 155
—, (*Marburg*), Berichtigung zu der Arbeit „Zur Zahlentheorie der Quaternionen-Algebren" . 197. 220
Engel, Wolfgang (*Halle*), Invariante Divisorenscharen bei endlichen Gruppen von Cremonatransformationen . . . . . 196. 59—66
Erdös, P. (*Haifa*), Einige Bemerkungen zur Arbeit von A. Stöhr: „Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe" . . . . . 197. 216—219
Evans, Arwel (*Cambridge*), A note on continued fractions and dimension theory . . . . . 195. 102—107
Fladt, Kuno (*Calw*), Über die Transformationen der Hauptgruppe in der nichteuklidischen Geometrie und die komplexe Trigonometrie . . . . . 192. 129—154
— —, Die allgemeine Kegelschnittsgleichung in der ebenen hyperbolischen Geometrie. I. . . . 197. 121—139
— —, Die allgemeine Gleichung der Flächen zweiten Grades in der hyperbolischen Geometrie . . 197. 140—161
— —, Die allgemeine Kegelschnittsgleichung in der ebenen hyperbolischen Geometrie. II. . . . 199. 203—207
Fragner, Wolfram (*Burghausen*), Über einen neuen Typ von Differentialgleichungen und eine neue Methode zur Integration der linearen, quadratischen und kubischen Differentialgleichung 194. 180—182
Fréchet, Maurice (*Paris*), La Paraanalitikaj funkcioj en *n* dimensioj . . . . . 195. 22—41
Freudenthal, Hans (*Utrecht*), Die Bedeutung der topologischen Voraussetzung bei der Buckel-van Heemertschen Charakterisierung des Systems der Kreise . . . . . 194. 190—192
Frey, Annemarie (*Straßburg*) und **Karl Strubecker** (*Karlsruhe*), Die Transformationstheorie der quadratischen Linienkomplexe [(11) (22)]. I. . . . . 193. 209—238
— — — —, Die Transformationstheorie der quadratischen Linienkomplexe [(11) (22)]. II. . . . 194. 1—20
Gaschütz, Wolfgang (*Kiel*), Gruppen, in denen das Normalteilersein transitiv ist . . . . . 198. 87—92
Gold, Richard R. & M. Z. v. Krzywoblocki (*Urbana*), On Superposability and Self-Superposability Conditions for Hydrodynamic Equations Based on Continuum. I. . . . . 199. 139—164
— — —, On Superposability and Self-Superposability Conditions for Hydrodynamics Equations Based on Continuum. II. . . . . 200. 140—169
Grothendieck, Alexandre (*Nancy*), Sur certains espaces de fonctions holomorphes. I. . . . . 192. 35—64
— —, Sur certains espaces de fonctions holomorphes. II. . . . . 192. 77—95
— (*Paris*), Sur une note de Mattuck-Tate . . . . . 200. 208—215
Günther, Alfred (*Göttingen*), Über transzendente $\mathfrak{p}$-adische Zahlen. I. . . . . 192. 155—166
— —, Über transzendente $\mathfrak{p}$.-adische Zahlen. II . . . . . 193. 1—10
Hadwiger, H. (*Bern*), Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie . . . . . 194. 101—110
Halberg, Charles J. A., Jr., siehe Taylor, Angus E.
Halberstam, H. (*Exeter*), Über additive zahlentheoretische Funktionen . . . . . 195. 210—214
Härtter, Erich (*Mainz*), Ein Beitrag zur Theorie der Minimalbasen . . . . . 196. 170—204
— —, Über die Klasse der Gewichtsfunktionen bei der Verallgemeinerung des Dichtesatzes . 200. 89—98
Haupt, Otto (*Erlangen*), Verallgemeinerung eines ordnungsgeometrischen Reduktionssatzes . . 200. 170—181
Hayman, W. K. (*Exeter*), A Generalisation of Stirling's Formula . . . . . 196. 67—95
van Heemert, A. (*Ape doorn*), Zur Kennzeichnung der Systeme der Kreise und der Kegelschnitte 194. 183—189
— —, Cyclic permutations with sequences and related problems . . . . . 198. 56—72
Hirzebruch, Friedrich (*Princeton*), Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der algebraischen Flächen auf komplexe Mannigfaltigkeiten von zwei komplexen Dimensionen . . . . . 191. 110—124
Hodges, John H. siehe Carlitz, L.
Hodges, John H. (*Buffalo*), Distribution of Bordered Matrices in a Finite Field . . . . . 198. 10—13
Hoehnke, Hans-Jürgen (*Halle*), Lösung eines Problems von Ch. Hopkins . . . . . 198. 112—120

	Band	Seite
Hornfeck, Bernhard (*Berlin*), Zur Struktur gewisser Primzahlsätze	196.	156—169
Içen, Orhan S. (*Göttingen*), Eine Verallgemeinerung und Übertragung der Schneiderschen Algebraizitätskriterien ins p-adische mit Anwendung auf einen Transzendenzbeweis im p-adischen	198.	28—55
Kanold, Hans-Joachim (*Gießen*), Einige neuere Bedingungen für die Existenz ungerader vollkommener Zahlen	192.	24—34
— —, Über die Dichte von gewissen Zahlenmengen	193.	250—252
— —, Über mehrfach vollkommene Zahlen	194.	218—220
— —, Über zahlentheoretische Funktionen	195.	180—191
— (*Braunschweig*), Über mehrfach vollkommene Zahlen. II.	197.	82—96
Kappos, Demetrios A. (*Erlangen*), Erweiterung von Maßverbänden	191.	97—109
Kasch, Friedrich (*Mainz*), Wesentliche Komponenten bei Gitterpunktmengen	197.	208—215
— (*Heidelberg*), Wesentliche Komponenten bei Gitterpunktmengen. II.	199.	53—55
Klein-Barmen, Fritz (*Wuppertal*), Multiplikative Funktionen über euklidischen und Sternverbänden	195.	121—126
Klingenberg, Wilhelm und **Ernst Witt** (*Hamburg*), Über die Arfsche Invariante quadratischer Formen mod 2	193.	121—122
Klöter, Hubert (*Köln*) und **Alfred Stöhr** (*Göttingen*), Wesentliche Komponenten und asymptotische Dichte	194.	210—217
Kneser, Martin (*Heidelberg*), Bestimmung des Zentrums der Cliffordschen Algebren einer quadratischen Form über einem Körper der Charakteristik 2	193.	123—125
— —, Orthogonale Gruppen über algebraischen Zahlkörpern	196.	213—220
Knödel, Walter (*Wien*), Primzahldifferenzen	195.	202—209
Kochendörffer, Rudolf (*Rostock*), Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte	192.	96—101
Koecher, Max (*Göttingen*), Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung	192.	1—23
Köthe, Gottfried (*Mainz*), Dualität in der Funktionentheorie	191.	30—49
Kowalsky, Hans-Joachim (*Erlangen*) und **Hansjürgen Dürbaum** (*Münster*), Arithmetische Kennzeichnung von Körpertopologien	191.	135—152
Krull, Wolfgang (*Bonn*), Über eine Verallgemeinerung des Normalkörperbegriffs	191.	54—63
— —, Zur Theorie der kommutativen Integritätsbereiche	192.	230—252
v. Krzywoblocki, M. Z. siehe Gold, Richard R.		
Kultze, Rolf (*Heidelberg*), Zur Theorie Fredholmscher Endomorphismen in nuklearen topologischen Vektorräumen	200.	112—124
Künneth, Hermann (*Erlangen*), Eine Kennzeichnung lokal konvexer Kurven	191.	158—164
Lamprecht, Erich (*Würzburg*), Struktur und Relationen allgemeiner Gaußscher Summen in endlichen Ringen. I.	197.	1—26
— —, Struktur und Relationen allgemeiner Gaußscher Summen in endlichen Ringen. II.	197.	27—48
Leopoldt, Heinrich-Wolfgang (*Princeton*), Zur Struktur der l-Klassengruppe galoisscher Zahlkörper	199.	165—174
Loonstra, F. (*den Haag*), Fortsetzung von Gruppenhomomorphismen	199.	192—202
Lowig, H. F. J. (*Hobart*), Gesetzrelationen über die frei erzeugten Algebren	193.	129—142
Mahler, K. (*Manchester*), An Interpolation Series for Continuous Functions of a p-adic Variable	199.	23—34
Masuda, K. (*Yamagata*), Hasse factor systems mod p	193.	161—165
Mattuck, Arthur (*Cambridge* [*Mass.*]), Reduction mod p of p-adic divisor classes	200.	45—51
Meyer, C. (*Hamburg*), Über einige Anwendungen Dedekindscher Summen	198.	143—203
Mitas, Günter (*Hamburg*), Bemerkungen zur Algebrentheorie	197.	68—75
— —, Über Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten	197.	76—81
— —, Zur Strukturtheorie separabler Algebren	198.	1—6
Moór, Arthur (*Szeged*), Untersuchungen in Räumen mit rekurrenter Krümmung	199.	91—99

	Band	Seite
Nikodým, Otton Martin (*Gambier*), On extension of a given finitely additive field-valued measure on a finitely additive Boolean tribe to another one more ample	199.	35—52
Nöbeling, Georg (*Erlangen*), Limitentheorie in topologischen Vereinen und Verbänden	191.	125—134
Ohmann, D. (*Frankfurt/Main*), Isoperimetrische und verwandte Extremalprobleme für beschränkte ebene Punktmengen	192.	65—73
— —, Einige dem Vierscheitelsatz verwandte Sätze über Eilinien	192.	74—76
Ostrowski, A. M. (*Basel*), On the spectrum of a one-parametric family of matrices	193.	143—160
— —, Über die Evoluten von endlichen Ovalen	198.	14—27
— —, On the bounds of a one-parametric family of matrices	200.	190—199
Paue, Christian (*Cape Town*), Ableitungsbasen, Prätopologie und starker Vitalischer Satz	191.	69—91
Pinl, M. siehe Ara, Rahmat.		
Pinl, M. (*Köln*), Ch. Loewners Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichungen der Gasdynamik	199.	175—187
Plünnecke, Helmut (*Göttingen*), Über ein metrisches Problem der additiven Zahlentheorie	197.	97—103
Pöschl, Klaus (*München*), Über Anwachsen und Nullstellenverteilung der ganzen transzendenten Lösungen linearer Differentialgleichungen. I.	199.	121—138
— —, Über Anwachsen und Nullstellenverteilung der ganzen transzendenten Lösungen linearer Differentialgleichungen. II.	200.	129—139
Richert, Hans-Egon (*Göttingen*), Aus der additiven Primzahltheorie	191.	179—198
— —, Über quadratfreie Zahlen mit genau r Primfaktoren in einer arithmetischen Progression	192.	180—203
Rieger, G. J. (*Gießen*), Zum Waringschen Problem für algebraische Zahlen und Polynome	195.	108—120
— —, Verallgemeinerung der Siebmethode von A. Selberg auf algebraische Zahlkörper. I.	199.	208—214
— —, Verschärfung des Satzes von Richert über die Verteilung der quadratfreien Zahlen mit genau r Primfaktoren in einer arithmetischen Progression	199.	215—220
Ringel, Gerhard (*Bonn*), Farbensatz für orientierbare Flächen vom Geschlechte $p > 0$	193.	11—38
Rohrbach, Hans und **Bodo Volkmann** (*Mainz*), Zur Theorie der asymptotischen Dichte	192.	102—112
— — —, Verallgemeinerte asymptotische Dichten	194.	195—209
Roquette, Peter (*München*), Arithmetischer Beweis der Riemannschen Vermutung in Kongruenzfunktionenkörpern beliebigen Geschlechts	191.	199—252
— (*Princeton*), Über das Hassesche Klassenkörper-Zerlegungsgesetz und seine Verallgemeinerung für beliebige abelsche Funktionenkörper	197.	49—67
— (*Hamburg*), Zur Theorie der Konstantenreduktion algebraischer Mannigfaltigkeiten	200.	1—44
Rühs, Fritz (*Rostock*), Über die einfach ausgearteten Rédeischen schiefen Produkte	198.	81—86
— (*Freiberg/Sa.*), Über das allgemeine Rédeische schiefe Produkt	200.	99—111
Sade, A. (*Marseille*), Sur le problème des transvasements	195.	1—2
— —, Quasigroupes automorphes par le groupe linéaire et géometrie finie	199.	100—120
Scheibe, Erhard (*Göttingen*), Über das Weylsche Raumproblem	197.	162—207
Schell, Hugo (*Mainz*), Über einige Probleme der Addition von linearen Punktmengen	200.	52—88
Scherk, Peter (*Saskatoon*), Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Kanold	196.	133—136
Schirmer, Helga (*Frankfurt/Main*), Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten	194.	21—39
Schmeidler, Werner (*Berlin-Frohnau*), Variationsrechnung und Integralgleichungen	200.	182—189
Schoeneberg, Bruno (*Hamburg*), Über die Quaternionen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen	193.	84—93
Schubert, Horst (*Heidelberg*), Zur Differenzierbarkeit der Abbildungen von Punktmengen des euklidischen Raumes	191.	1—12
Schulz-Arenstorff, Richard (*Mainz*), Über die zweidimensionale Verteilung der Primzahlen reell-quadratischer Zahlkörper in Restklassen	198.	204—220
Specht, Wilhelm (*Erlangen*), Eine mathematische Frage der Strahlentherapie	191.	92—96

	Band	Seite
Stinespring, W. Forrest (*Princeton*), A Sufficient Condition for an Integral Operator to Have a Trace	200.	200—207
Stöhr, Alfred siehe Klöter, Hubert.		
Stöhr, Alfred (*Göttingen*), Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe. I.	194.	40—65
— —, Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe. II.	194.	111—140
— —, Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie. III.	195.	172—174
— — und **Eduard Wirsing** (*Berlin*), Beispiele von wesentlichen Komponenten, die keine Basen sind	196.	96—98
Strubecker, Karl siehe Frey, Annemarie.		
Taylor, Angus E. and **Charles J. A. Halberg Jr.** (*Los Angeles*), General theorems about a bounded linear operator and its coniugate	198.	93—111
Thimm, Walter (*Bonn*), Über die Nullstellenmengen von Polynomidealen über dem Potenzreihenring	193.	183—208
Tietze, Heinrich (*München*), Über die Glaisher'sche Verallgemeinerung eines Euler'schen Satzes über Partitionen	191.	64—68
Tillmann, Heinz Günther (*Ibadan*), Dualität in der Funktionentheorie auf Riemannschen Flächen	195.	76—101
Truesdell, C. siehe Bernstein, B.		
Uluçay, Cengiz (*Ankara*), The Exact Value of the Bloch-Landau Constants $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{L}$	199.	188—191
Volkmann, Bodo siehe Rohrbach, Hans.		
Volkmann, Bodo (*Mainz*), Zwei Bemerkungen über pseudorationale Mengen	193.	126—128
— —, Ein Satz über die Menge der vollkommenen Zahlen	195.	152—155
— —, Einige Sätze über k-freie Zahlen	198.	7—9
Wagner, Richard (*Jena*), Ein Kontaktproblem der konformen Abbildung	196.	99—132
Wirsing, Eduard siehe Stöhr, Alfred.		
Witt, Ernst siehe Klingenberg, Wilhelm.		
Witt, Ernst (*Hamburg*), Über eine Invariante quadratischer Formen mod 2	193.	119—120
Wolff, Paul (*Hamburg*), Das Einbettungsproblem galoisscher Algebren	193.	166—182
Wright, E. M. (*Aberdeen*), A non-linear difference-differential equation	194.	66—87
Zulauf, Achim (*Mainz*), Über den dritten Hardy-Littlewoodschen Satz zur Goldbachschen Vermutung	192.	117—128
— —, Über die Darstellung natürlicher Zahlen als Summen von Primzahlen aus gegebenen Restklassen und Quadraten mit gegebenen Koeffizienten. I.	192.	210—229
— —, Über die Darstellung natürlicher Zahlen als Summen von Primzahlen aus gegebenen Restklassen und Quadraten mit gegebenen Koeffizienten. II.	193.	39—53
— —, Über die Darstellung natürlicher Zahlen als Summen von Primzahlen aus gegebenen Restklassen und Quadraten mit gegebenen Koeffizienten. III	193.	54—64

207

-65
140
174
-98

111

208

-68
101

191

-128
-155
7—9
-132

-120
-182
—87

-128

-229

—53

—64